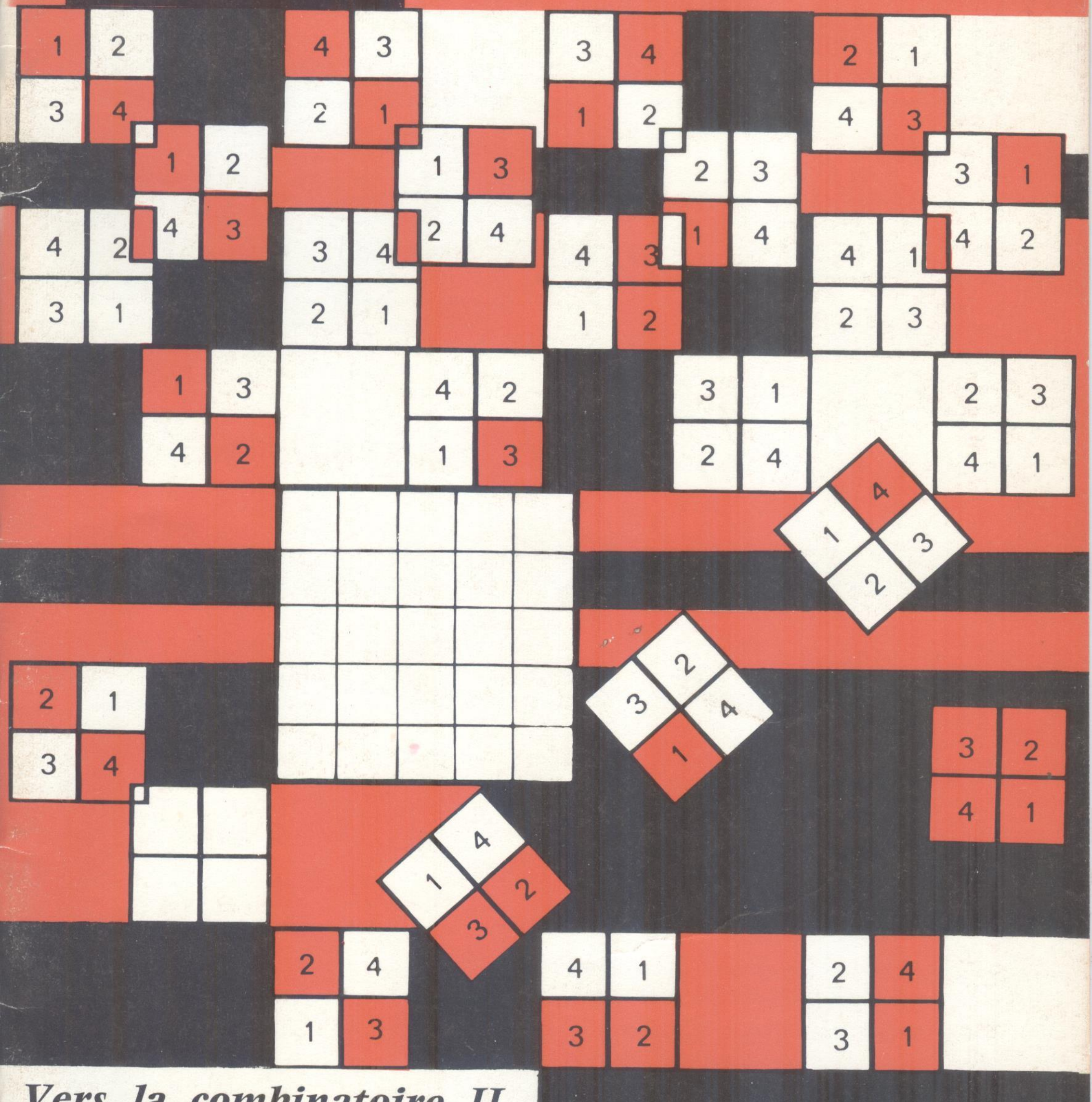
SBT

supplément bimensuel bibliothèque de travail

318

1er MARS 1972



Vers la combinatoire II

Libres recherches et créations mathématiques n° 12

DES CARRÉS... DES NOMBRES... DES COULEURS...

Dénombrements...

par Monique et Claude MAURY

Paraît sous la responsabilité juridique
de l'ICEM-Pédagogie FREINET - Président F. Deléam
Responsable de la rédaction : M.-E. Bertrand
Loi n° 49-956 du 16 Juillet 1949
sur les publications destinées à la jeunesse

Membres du comité : M.-E. Bertrand - M. Menusan - R. Poitrenaud

Printed in France by Imp. CEL - Cannes-La Bocca
Dépôt légal : 1er trimestre 1972
n° édition : 387 - n° d'impression : 2009
Prix du numéro simple : 1,80 F

DANS CE NUMERO

REPORTAGE

DES CARRÉS... DES NOMBRES... DES COULEURS... *par les classes (de la 6e à la 2e) de Monique et Claude MAURY*

COMITE de LECTURE :

Commission "Mathématiques" de l'ICEM

COUVERTURE

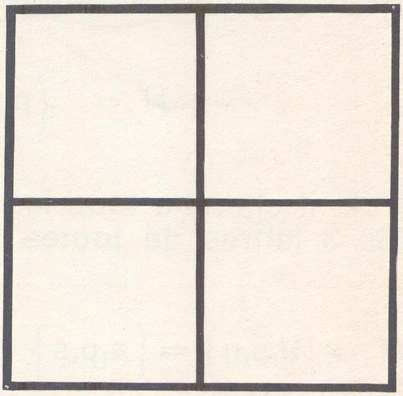
Dessin atelier B.T.

I.C.E.M. Pédagogie FREINET — RÉDACTION ABONNEMENTS : PLACE HENRI BERGIA - 06 CANNES — C.C.P. Marseille 1145-30 — TÉLÉPHONE 39 . 47 . 42

SOMMAIRE

LES CARRÉS

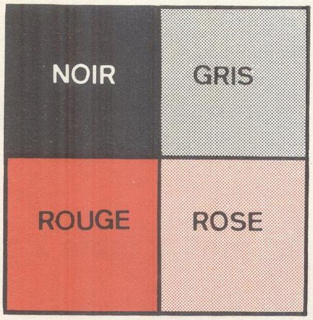
Etienne réfléchit
sur cette figure.

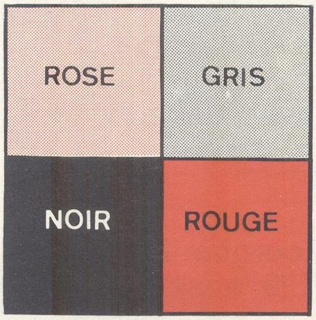


Puis il numérote chaque case et choisit une couleur pour chaque numéro :

1 : noir ; 2 : gris ; 3 : rose ; 4 : rouge

Il obtient ainsi des carrés différents :





Il y en a d'autres...

Il a cherché à les former tous et à les compter.

Tu peux essayer.

Etienne Perruchon
(classe de 6^{e})

Suite des carrés page 14

“PAS”, “TABLE”

Hubert forme l'ensemble des lettres du mot « pas » :

$$H = \{p, a, s\}$$

Puis il cherche tous les ensembles égaux à H en plaçant les 3 lettres de toutes les façons possibles.

$$H = \{a,s,p\} = \{a,p,s\} = \{s,a,p\} = \{s,p,a\} = \{p,s,a\}$$

Il compte 6 ensembles égaux à H.

Tu peux recommencer avec d'autres mots.

Essaie avec un mot de 4 lettres, par exemple « pâte ».

Marie-Georges a travaillé avec le mot « table » ; elle a trouvé 120 ensembles égaux.

Hubert Concile
Marie-Georges Benédet (6e)

Ensemble des lettres du mot : "pas"

H : { p, a, s }

H : { a, s, p }

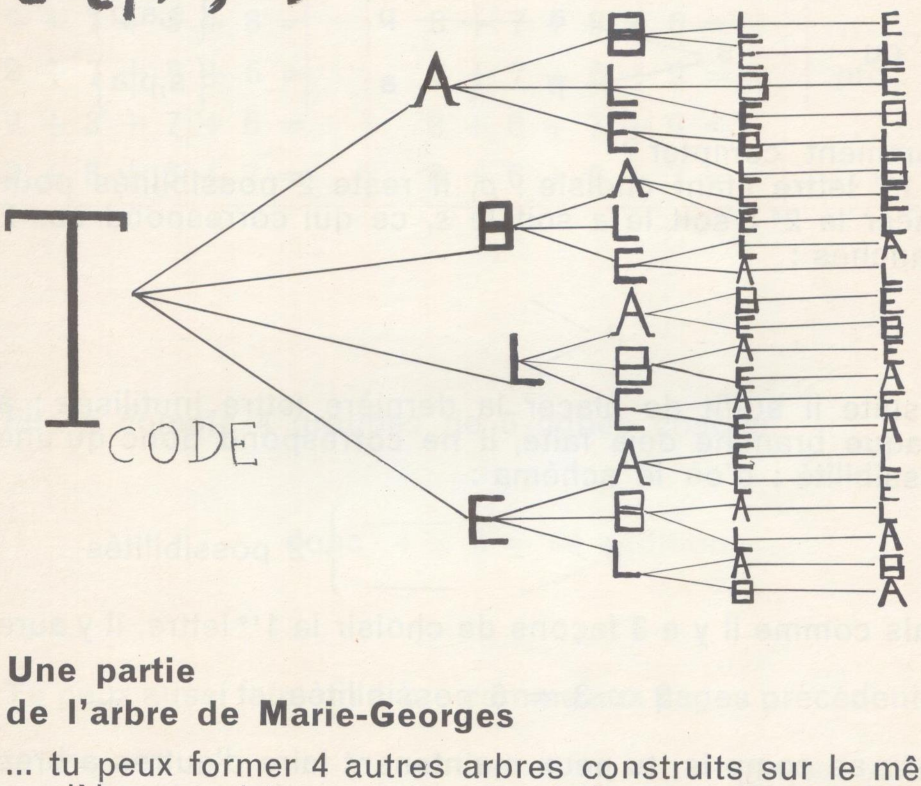
H : { a, p, s }

H : { s, a, p }

H : { s, p, a }

H : { p, s, a }

Hubert



Une partie
de l'arbre de Marie-Georges

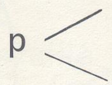
... tu peux former 4 autres arbres construits sur le même modèle, ce qui te permettra de vérifier son résultat (120).

Tu as observé sur la page précédente la disposition du travail de Marie-Georges : c'est un *arbre*. Cette disposition en arbre permet de compter plus rapidement tous les ensembles obtenus.

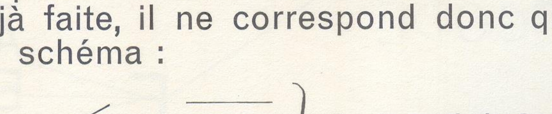
Essayons de faire l'arbre avec « pas ».

	1re lettre	2e lettre	3e lettre	
	p	a	s	$\{p,a,s\}$
		s	a	$\{p,s,a\}$
ou	a	p	s	$\{a,p,s\}$
		s	p	$\{a,s,p\}$
ou	s	a	p	$\{s,a,p\}$
		p	a	$\{s,p,a\}$

Comment compter ?
la 1re lettre étant choisie : *p*, il reste 2 possibilités pour placer la 2e : soit le *a* soit le *s*, ce qui correspond aux 2 branches :



Ensuite il suffit de placer la dernière lettre inutilisée ; à chaque branche déjà faite, il ne correspond donc qu'une possibilité ; d'où le schéma :



Mais comme il y a 3 façons de choisir la 1re lettre, il y aura

$$2 \times 3 = 6 \text{ possibilités}$$

Si tu as compris, tu peux maintenant faire d'autres arbres sur ce modèle.

$9+6+7+8=\dots$

$9 + 6 + 7 + 8 = \dots$
Tu sais faire cette addition !

Françoise aussi... mais elle a cherché toutes les façons possibles de placer les 4 nombres de cette addition.

Voilà son travail :

$9 + 6 + 7 + 8 =$	$8 + 9 + 6 + 7 =$	.....
$9 + 6 + 8 + 7 =$	$8 + 9 + 7 + 6 =$	.....
$9 + 7 + 6 + 8 =$	$8 + 7 + 9 + 6 =$	.....
$9 + 7 + 8 + 6 =$	$8 + 7 + 6 + 9 =$	etc..
$9 + 8 + 7 + 6 =$	$8 + 6 + 7 + 9 =$	.....
$9 + 8 + 6 + 7 =$	$8 + 6 + 9 + 7 =$	.....

Elle a compté 4 groupes de 6 lignes chacun

donc $4 \times 6 = 24$ additions

Tu peux aussi faire un arbre comme aux pages précédentes.

Françoise Arnoult
(Classe de 6e)

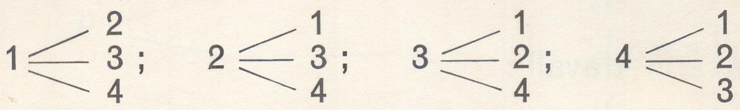
AVEC DES CHIFFRES !

Philippe et Catherine choisissent 4 chiffres : 1, 2, 3, 4 et cherchent combien ils peuvent former de nombres différents à 1 chiffre, puis à 2, puis à 3, puis à 4. Ils posent comme règle du jeu que, dans un nombre, tous les chiffres doivent être différents.

Ex. 124 convient mais 121 ne convient pas.

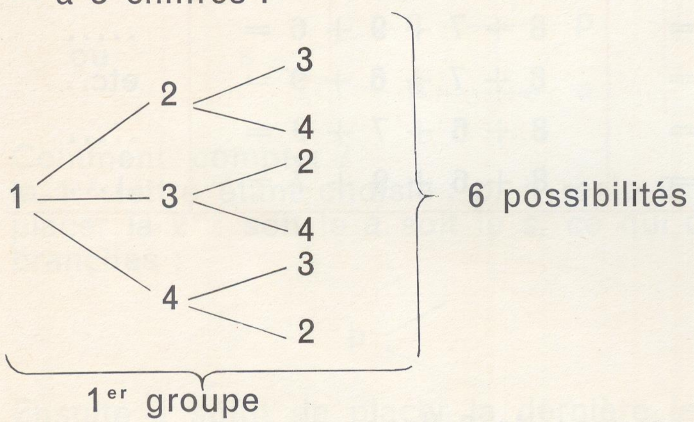
— à 1 chiffre c'est très simple : 4 solutions

— à 2 chiffres, ils forment l'arbre :



4 groupes de 3 possibilités chacun soit $4 \times 3 = 12$ solutions

— à 3 chiffres :



donc en tout 4 groupes de 6 possibilités chacun

soit $4 \times 6 = 24$ solutions

— à 4 chiffres : en faisant l'arbre tu t'apercevras qu'il y a là aussi 24 solutions !!

Catherine Grelier
Philippe Condolo
(Classe de 5e)

D'autres camarades ont cherché le problème suivant :

— avec 2 chiffres donnés, combien peut-on former de nombres à 2 chiffres différents les uns des autres ? (sans répéter le même chiffre dans le nombre)

— puis avec 3 chiffres donnés, combien de nombres à 3 chiffres ?

— puis avec 4 chiffres donnés, combien de nombres à 4 chiffres (toujours sans répéter le même chiffre et pour que les nombres obtenus soient différents les uns des autres), etc.

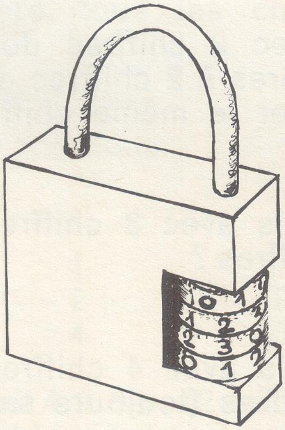
Essaie de faire ces dénombrements et vérifie à la page 21 si tes résultats sont exacts.

Quelques élèves de 5e

Tu peux à ton tour imaginer beaucoup d'autres recherches de ce genre.

LE CADENAS A SECRET

Eric est interne et il range ses affaires dans un casier qu'il ferme avec un cadenas à secret.



Des crans permettent de placer chaque rondelle dentée sur le chiffre choisi.

Sur chaque rondelle sont inscrits 4 chiffres : 0, 1, 2, 3.

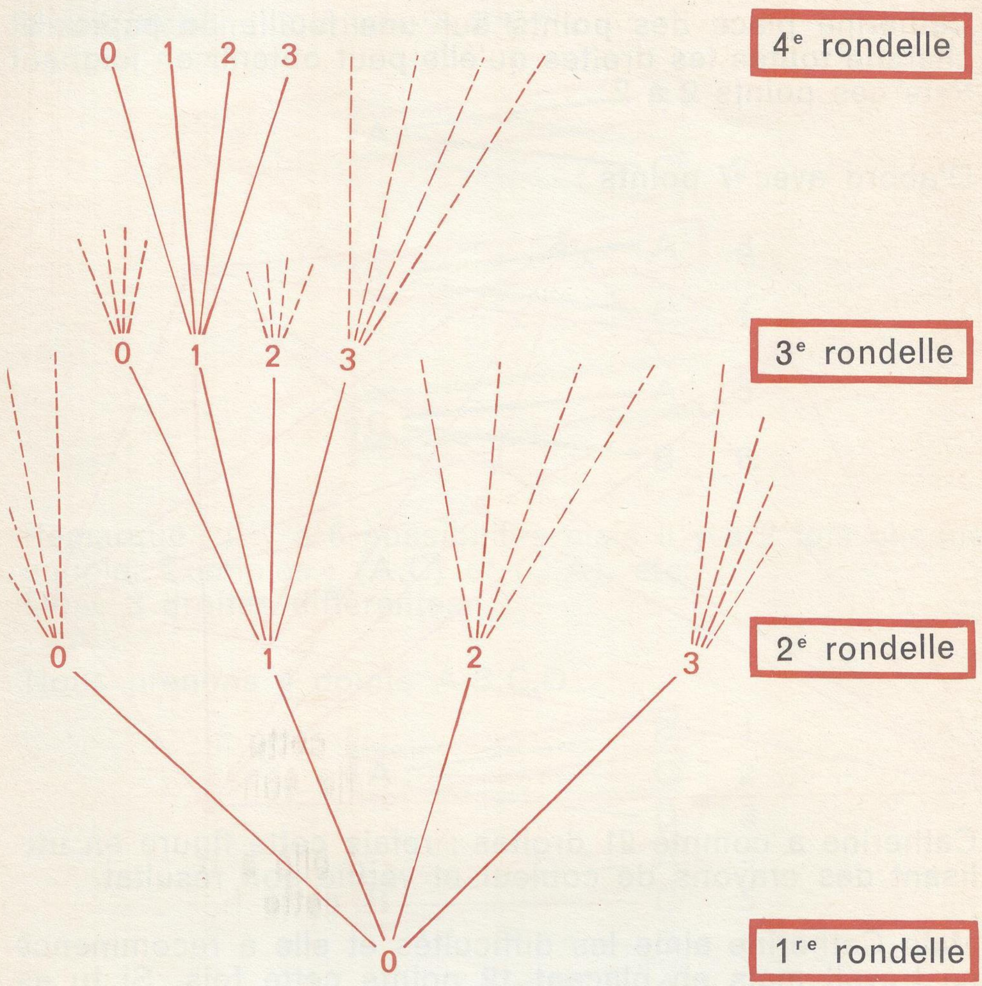
Pour ouvrir le cadenas il suffit de réaliser la combinaison de 4 chiffres choisie par le propriétaire.

Jean-Marie et Jean-Marc ont voulu essayer d'ouvrir le cadenas. Ils ont fait de nombreuses tentatives mais en vain !

Ils ont alors voulu chercher combien il y a de combinaisons possibles.

Voici une partie de l'arbre qu'ils ont réalisé

Eric Delachat,
Jean-Marc Epitalon
Jean-Marie Devillaz
(Classe de 5^e^)



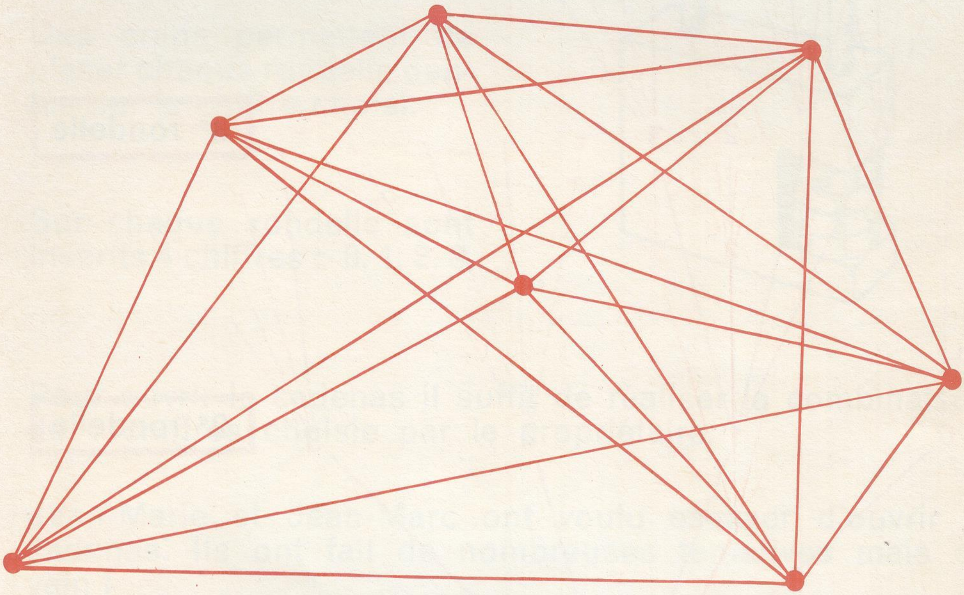
Sur cet arbre ils comptent $4 \times 4 \times 4$ solutions. Mais sur la 1re rondelle ils peuvent choisir le 0, le 1, le 2 ou le 3, il y a donc 4 arbres analogues à celui-ci, ce qui fait au total

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256 \text{ solutions !}$$

COMPTER LES POIN

Catherine place des points sur une feuille de papier et cherche toutes les droites qu'elle peut obtenir en joignant tous ces points 2 à 2.

D'abord avec 7 points :



Catherine a compté 21 droites ; refais cette figure en utilisant des crayons de couleur et vérifie son résultat.

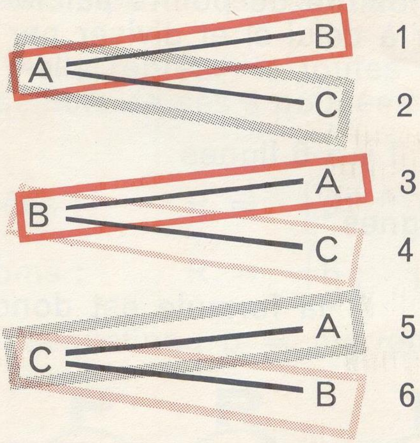
Mais Catherine aime les difficultés et elle a recommencé ce travail mais en plaçant 12 points cette fois. Si tu as de la patience tu peux essayer.

Mais si tu aimes le travail plus méthodique tu feras comme Gilles et Jean-Marc : au lieu d'augmenter le nombre de points ils le diminuent et essayent de trouver une loi.

Voici leur travail

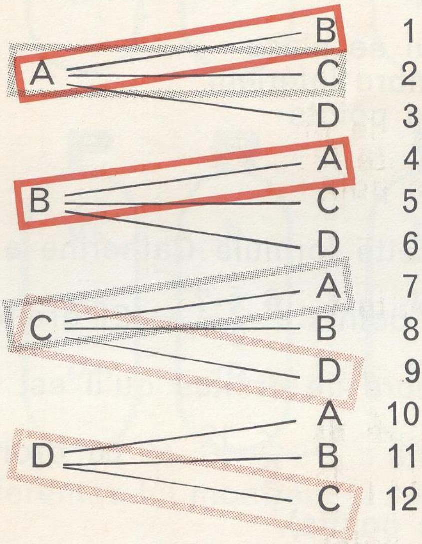
TS ET LES DROITES

Nous prenons 3 points A,B,C



Remarque : il y a 6 possibilités mais il y a 2 fois chaque couple. Exemples : (A,C) et (C,A), etc.
Donc 3 droites différentes.

Nous prenons 4 points A,B,C,D



Remarque : cette fois, pour 4 points, il y a 12 possibilités mais il y a encore 2 fois les mêmes couples. Ex. : (A,B) et (B,A) (C,A) et (A,C), etc.

Donc 6 droites différentes.

Conclusion : pour trouver le nombre de possibilités, il faut multiplier le nombre de points par le nombre immédiatement inférieur à celui-ci et diviser par 2.

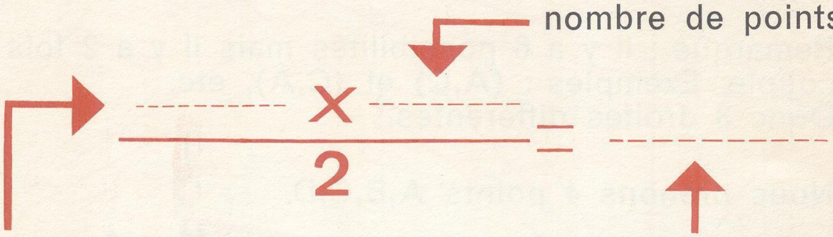
Exemple :

pour 4 points il y a 6 lignes

$\frac{3 \times 4}{2} = 6$ lignes

la formule est donc

nombre de points



le nombre qui se place ici est le nombre inférieur au nombre de points

nombre de droites

En utilisant cette formule Catherine a pu vérifier son résultat (avec 7 points: $\frac{6 \times 7}{2} = 21$ droites) et trouver sans peine le nombre de droites qu'il est possible de former avec 12 points : $\frac{11 \times 12}{2} = 66$ droites (et même avec davantage de points).

Catherine Arnoult
Gilles Bourgeois
Jean-Marc Bouvet
(Classe de 6e)

LES POUPÉES DE CATHERINE

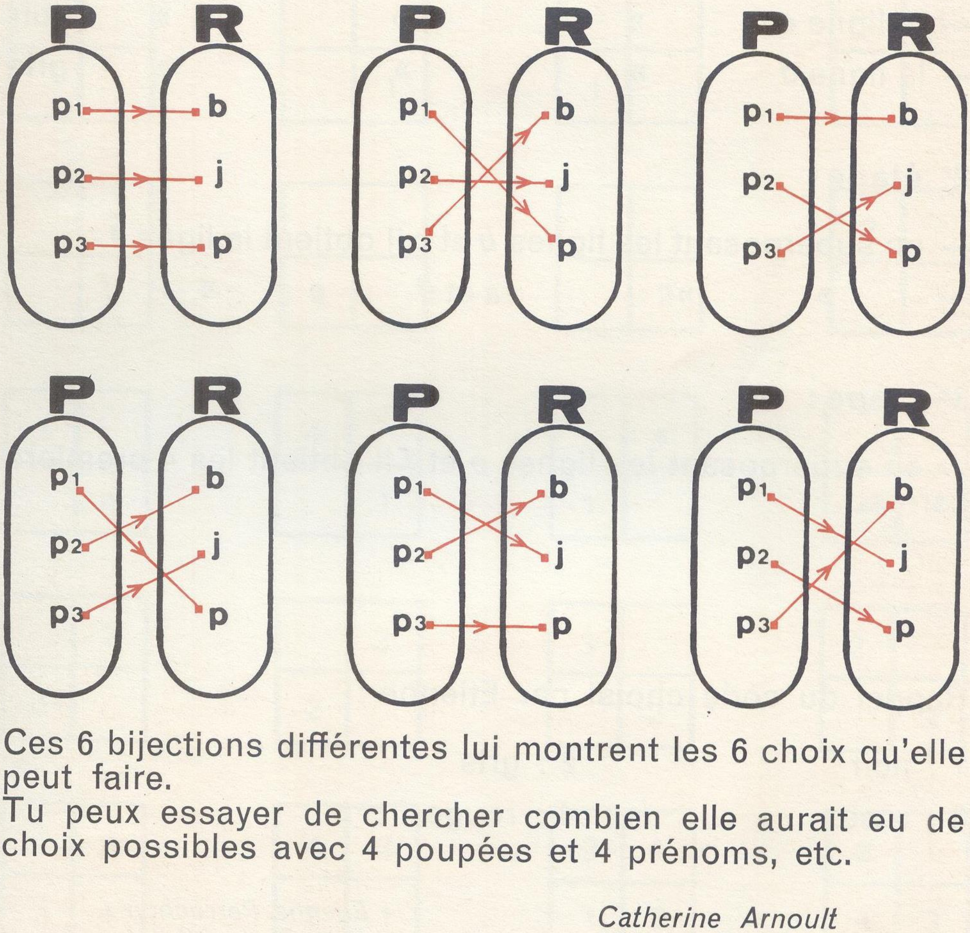
Catherine a 3 poupées, elle a choisi 3 prénoms : elle cherche toutes les façons possibles de les leur attribuer.

Voici ses schémas : elle représente toutes les bijections possibles entre l'ensemble de ses 3 poupées et l'ensemble des prénoms

ensemble des poupées : $P = \{p1\ ;\ p2\ ;\ p3\}$

ensemble des prénoms : $R = \{b\ ;\ j\ ;\ p\}$

b = brunette ; j = jacqueline ; p = pierrette.



Ces 6 bijections différentes lui montrent les 6 choix qu'elle peut faire.
Tu peux essayer de chercher combien elle aurait eu de choix possibles avec 4 poupées et 4 prénoms, etc.

Catherine Arnoult
(Classe de 6e)

LES CARRÉS (Suite)

Tu as sans doute fait des découvertes à partir des carrés d'Etienne (page 1). Voici son travail :

D'abord, il a cherché une méthode pour construire les 4 premiers carrés : en effet tu as pu observer comme lui que chaque couleur peut occuper 4 positions différentes.

1re étape :

— la ligne *a* montre les 4 positions possibles pour le rose

— la ligne *b* montre les 4 positions possibles pour le rouge

— la ligne *c* » » » noir

— la ligne *d* » » » gris

2e étape :

— en superposant les lignes *b* et *c* il obtient la ligne *e*

— » » *a* et *d* » » *f*

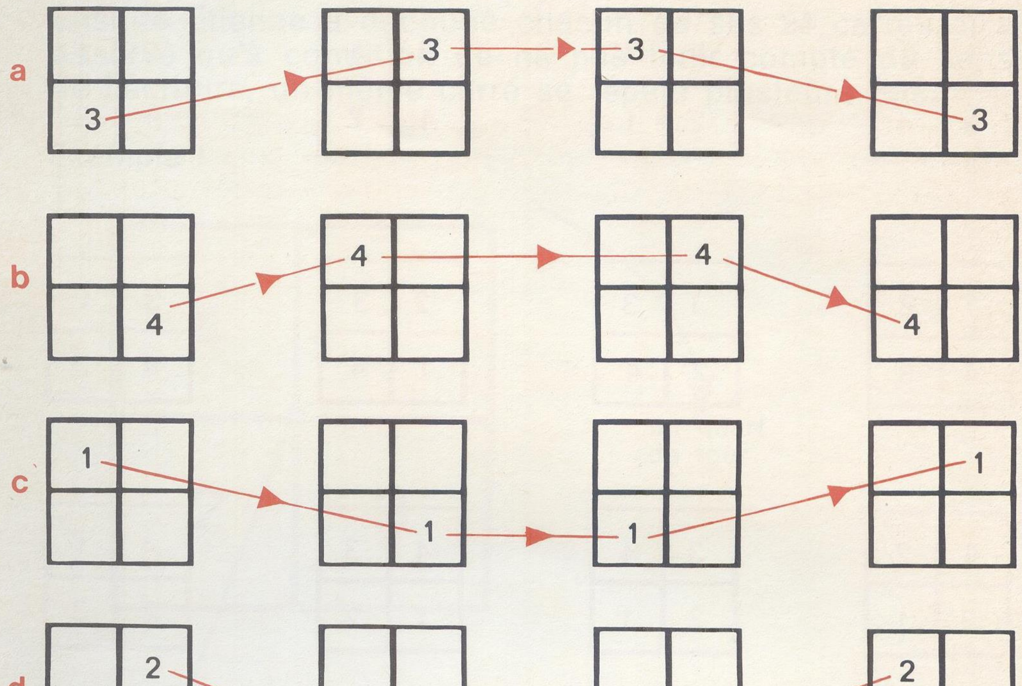
3e étape :

— en superposant les lignes *e* et *f* il obtient les 4 premiers carrés.

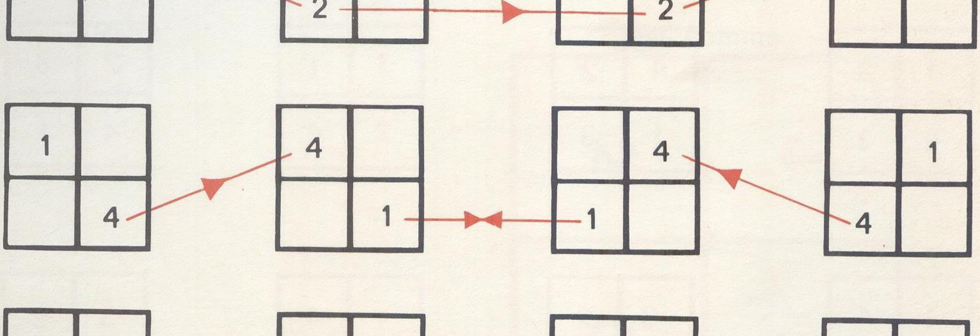
Rappel du code choisi par Etienne :

1 : noir	2 : gris
3 : rose	4 : rouge

Etienne Perruchon
(Classe de 6e)



enfin :



A partir de ses 4 premiers carrés, Etienne a trouvé 24 carrés différents disposés ainsi :

1	2
3	4

4	3
2	1

3	4
1	2

2	1
4	3

1	2
4	3

1	3
2	4

2	3
1	4

3	1
4	2

4	2
3	1

3	4
2	1

4	3
1	2

4	1
2	3

1	3
4	2

4	2
1	3

3	1
2	4

2	3
4	1

1	4
3	2

3	2
1	4

1	4
2	3

3	2
4	1

2	4
1	3

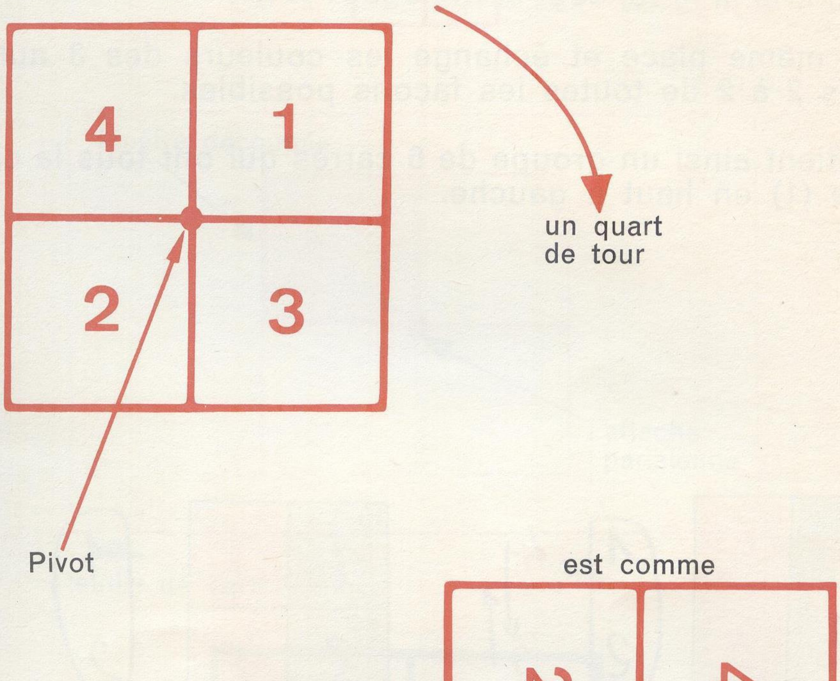
4	1
3	2

2	4
3	1

2	1
3	4

Ensuite Etienne a découpé chacun de ses 24 carrés, il a observé qu'à condition de ne pas tenir compte du sens de l'écriture, un même carré se répète plusieurs fois.

Exemple :

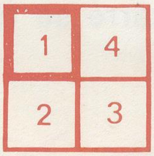


Chaque carré peut pivoter ainsi 4 fois d'un quart de tour :

Etienne en conclut que chaque carré est répété 4 fois.

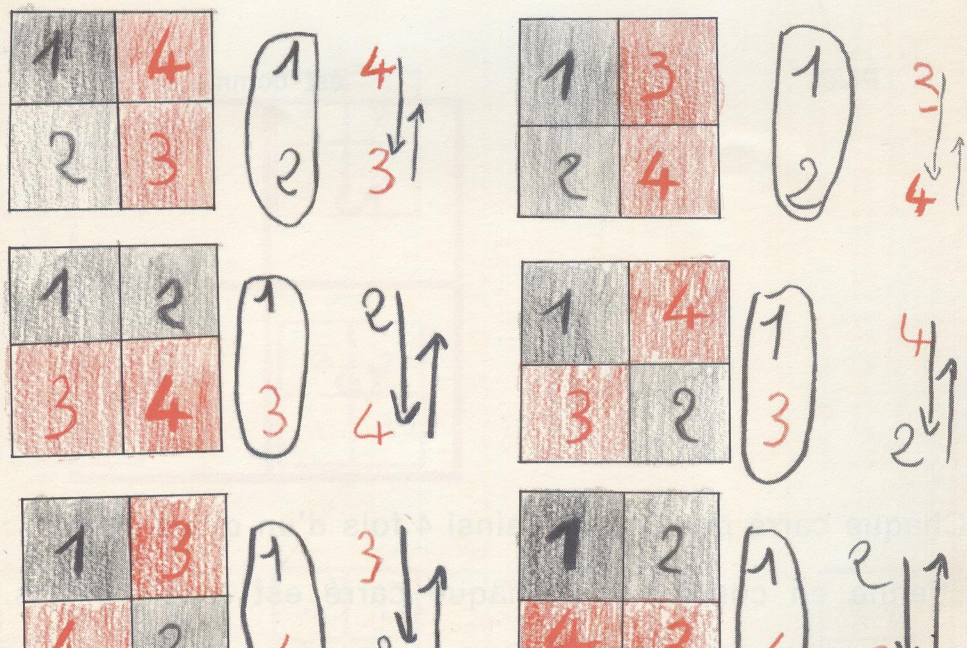
Il y aurait donc en fait seulement 6 carrés dont les couleurs ne peuvent pas se superposer.

Etienne a alors inventé un moyen pour reconstruire méthodiquement les 24 carrés :

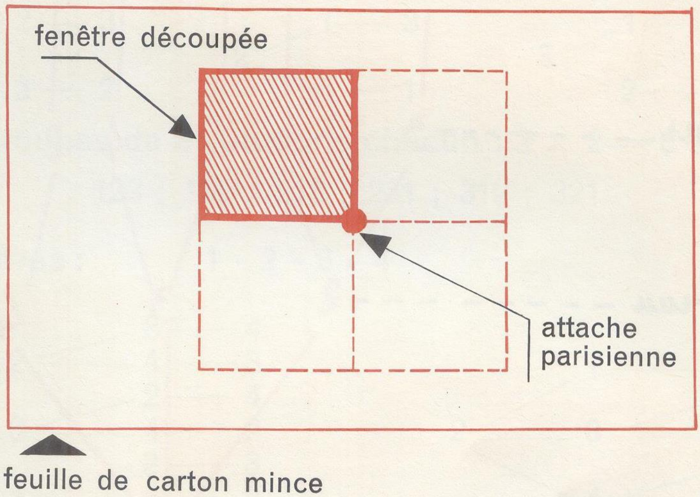
1°) A partir d'un carré  il garde toujours le 1

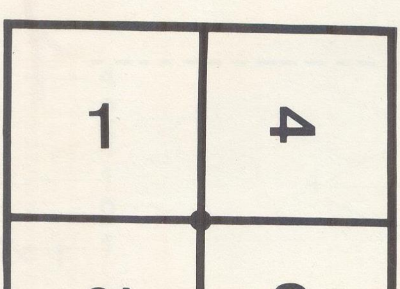
à la même place et échange les couleurs des 3 autres cases 2 à 2 de toutes les façons possibles.

Il obtient ainsi un groupe de 6 carrés qui ont tous la case noire (1) en haut à gauche.



2°) Par le dispositif ci-dessous, que tu pourras réaliser facilement, il a montré qu'il pouvait fabriquer de la même façon 4 groupes de 6 carrés différents : il suffit de tourner le carré d'un quart de tour à chaque fois. Apparaissent alors dans la fenêtre découpée, successivement les 4 couleurs : le noir (1), le rouge (4), le rose (3) et le gris (2).

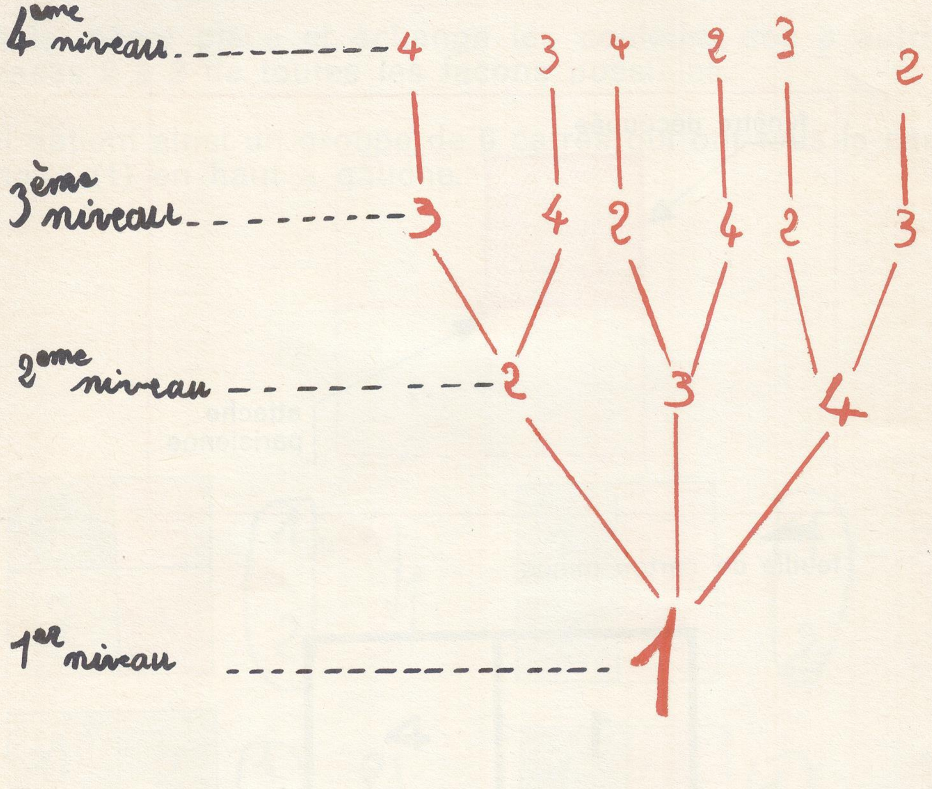




Carré à fixer par attache parisienne sous le cadre ci-dessus et à faire tourner.

$$6 \times 4 = 24$$

Enfin, comme Etienne avait déjà rencontré des représentations en arbres, il a donné le schéma suivant qui est une partie de l'arbre.



1 × 3 × 2 × 1 = 6

Voilà le travail d'Etienne ; tu as sans doute fait d'autres remarques, d'autres découvertes qui intéresseraient Etienne.

Voici l'adresse à laquelle tu peux les lui faire parvenir :

Etienne Perruchon, classe de Mme Maury
Lycée du Mt Blanc, 74 - Le Fayet

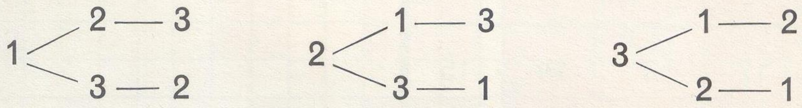
REPONSES

aux questions de la page 7

à 2 chiffres : 1 - 2 2 solutions $\begin{cases} 1 \ 2 \\ 2 \ 1 \end{cases}$

à 3 chiffres : 1 - 2 - 3

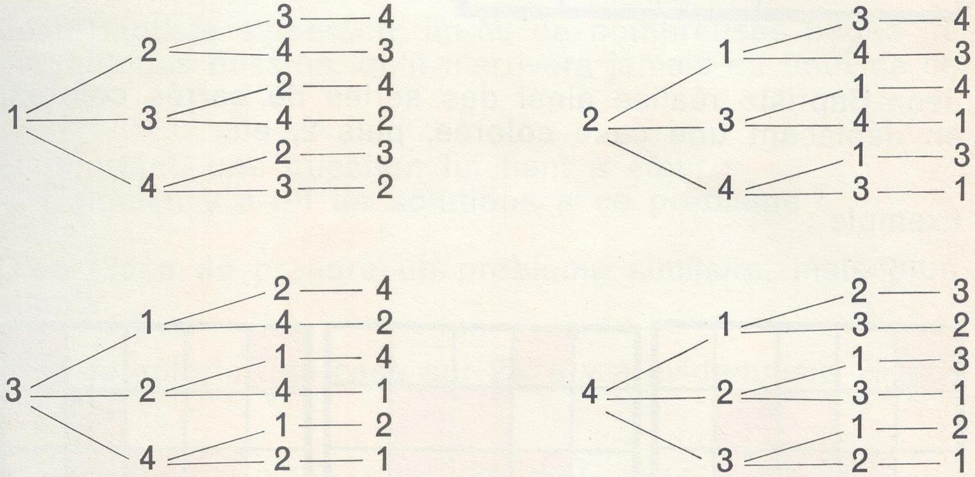
tu fais les arbres :



Soit 3 groupes de 2 solutions chacun : $3 \times 2 = 6$ solutions

123 ; 132 ; 213 ; 231 ; 312 ; 321.

à 4 chiffres : 1 - 2 - 3 - 4

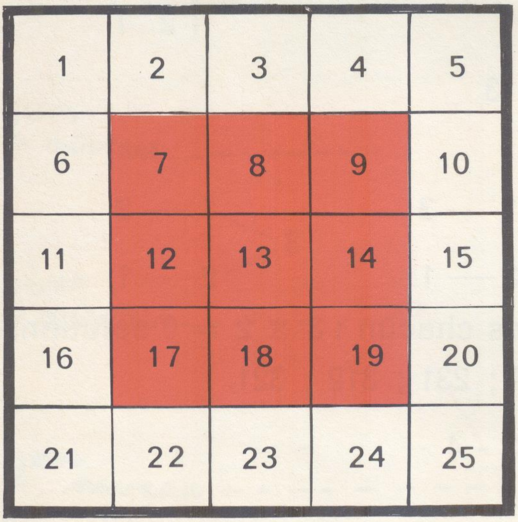


Soit 4 groupes de 6 solutions chacun : $4 \times 6 = 24$ solutions

1234 ; 1243 ; 1324 ; 1342 ; 1423 ; 1432 ;
2134 ; 2143 ; 2314 ; 2341 ; 2413 ; 2431 ;
3124 ; 3142 ; 3214 ; 3241 ; 3412 ; 3421 ;
4123 ; 4132 ; 4213 ; 4231 ; 4312 ; 4321 ;

ENCORE DES CARRÉS !

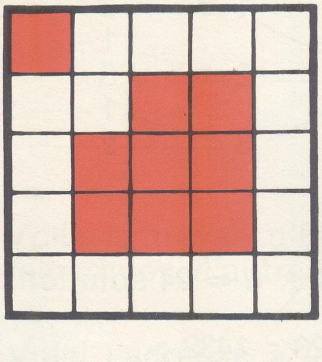
Jean-Baptiste, inspiré par le travail sur le carré de son frère, Etienne, élève de 6e, se pose la question :



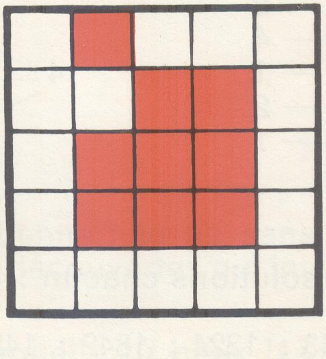
de combien de façons peut-on colorier 9 carrés sur les 25 pour obtenir des figures différentes ?

Jean-Baptiste réalise ainsi des séries de carrés colorés, en déplaçant une case colorée, puis 2, etc.

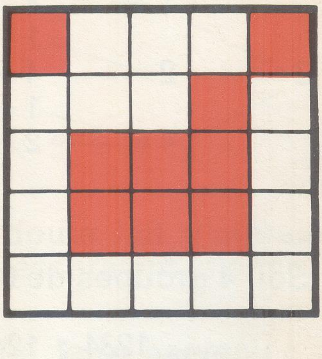
Exemple :



1 case



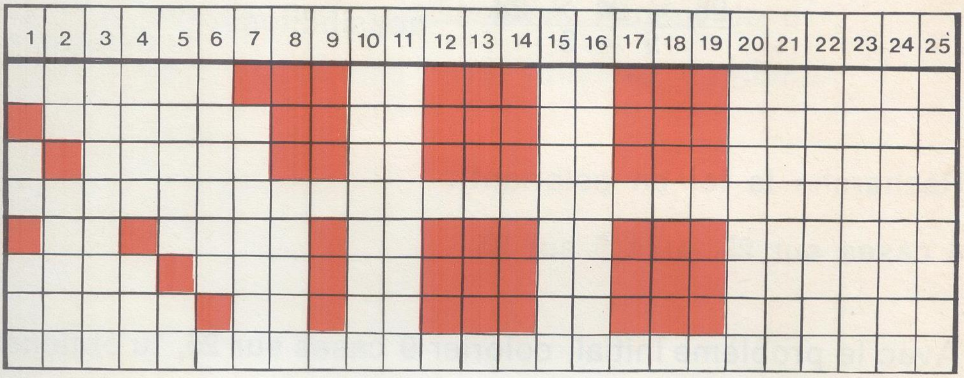
1 case



2 cases

Puis pour économiser de la place, Jean-Baptiste dispose les 25 petits carrés de son carré de départ sur une ligne.

Pour cela, il utilise le quadrillage d'une feuille de papier.



Jean-Baptiste s'aperçoit, après de nombreuses pages de magnifiques dessins, qu'il n'arrivera jamais au bout de ce travail.

Et pourtant, une question lui tient à cœur :
— Combien y a-t-il de solutions à ce problème ?

D'où l'idée de prendre un problème similaire, mais plus simple.

— Si je colorie une case sur 25, il y a évidemment 25 solutions.

— Si je colorie 2 cases sur 25, j'ai le choix entre 25 cases pour colorier la 1re case, puis, une case étant coloriée, le choix entre 24 cases pour colorier la 2me.

Mais attention !... En continuant ce travail, je m'aperçois que si j'ai colorié la case 3 puis la case 5 par exemple, je colorie ensuite la case 5 puis la case 3 et j'obtiens le même dessin une 2me fois d'où le nombre $\dfrac{25 \times 24}{2}$

Si je colorie 3 cases sur 25, le problème est un peu plus compliqué... Par un raisonnement similaire au précédent je dois obtenir

$$\frac{25 \times 24 \times 23}{2 \times 3} \quad \text{possibilités}$$

Recherche la loi en coloriant :

4 cases sur 25, puis 5 sur 25

Avec le problème initial, colorier 9 cases sur 25, tu obtiens

$$\frac{25 \times \cancel{24} \times 23 \times \overset{11}{\cancel{22}} \times \overset{\cancel{3}}{\cancel{21}} \times \cancel{20} \times 19 \times \cancel{18} \times 17}{1 \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{4} \times \cancel{5} \times \underset{\cancel{3}}{\cancel{6}} \times \cancel{7} \times \cancel{8} \times \cancel{9}}$$

$= 25 \times 23 \times 11 \times 19 \times 17$

$=$ 2 042 975 solutions

Pas étonnant si Jean-Baptiste n'a pas dessiné toutes les bandes !

Tu peux modifier les données du problème et par exemple rechercher de combien de façons tu peux colorier *n* cases sur une bande comportant *p* cases.

Jean-Baptiste Perruchon
(Classe 2^e AB2)

A travers les différentes situations présentées dans ce livret, les élèves abordent naturellement les notions de *permutation*, *arrangement*, *combinaison*. Autant de départs possibles vers l'analyse combinatoire.

A ce stade, les travaux des élèves sont avant tout des « constructions », des « manipulations », des schémas (diagrammes, arbres, etc.) guidés par un raisonnement inductif qui ne les amène pas encore dans ces classes (6^e et 5^e) à démontrer, mais qui constitue une approche sensible de la démonstration par récurrence ; étape nécessaire, parce que vécue et concrète vers la mathématique abstraite.

Monique Maury
Claude Maury
(Classes de la 6^e à la 2^e)
Lycée du Mt-Blanc
74 - Le Fayet