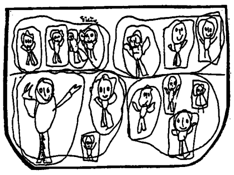
Le Nouvel Educateur n°44
Décembre 92
Dossier

Carrés de nombres

Mathématiques au CP



Une auto-socio-construction de savoirs mathématiques au cours préparatoire début d'année.

Situation vécue dans la classe d'Anne-Marie Mislin (Durmenach, Haut-Rhin), commentée par Edmond Lèmery (voir les encadrés).

Sommaire

Une situation vivante: présenter notre classe

Pour présenter notre classe aux correspondants, nous nous dessinons.
D'abord quelques remarques spontanées des enfants qui naissent immédiatement de l'observation des dessins :

-*La colonne des filles est plus courte que celle des garçons.*
- *C'est parce qu'elles sont moins nombreuses que nous.*
- Je *peux les compter toutes elles sont 9 et nous on est plus que 9.*
- *C'est normal, on est même plus que 10.*
- *Nous sommes 4 de plus que 10. »*

Chacun se dessine (sur une feuille 11,5 x 15 cm soit le quart du format A4). Olivia et Laetitia sont chargées de coller les dessins des filles sur un papier fort de grande dimension.

Un problème se pose alors...

Au moment de coller ces dessins, Olivia et Laetita ne sont pas d'accord sur la manière de les disposer sur la grande feuille.

Qu'en pensent les autres ?

Il s'avère que chaque enfant a une proposition à faire.

Il faudra donc choisir celle que tout le monde préférera.

Première recherche

Comment Olivia et Laetitia devront-elles disposer les 9 dessins des filles de la classe sur la grande feuille à envoyer aux correspondants?

Parmi toutes les réflexions, analyses ou interprétations qui peuvent être faites sur un tel document, je retiendrai seulement deux types apparents d'activités qui constituent, avec d'autres, les fondements d'une méthode naturelle d'apprentissage :

- l'activité socio-cognitive dans la construction de savoirs,

- l'activité conceptuelle ou conceptualisation, fortement personnalisée, à base d'expression libre et de tâtonnement.

Chaque enfant dessine sa proposition puis la présente au groupe.

Sa proposition est alors commentée, critiquée, discutée.

Voici quelques-unes de ces propositions avec les commentaires de présentation. Pour des raisons techniques (le nombre et la similarité des productions) toutes ne sont pas reproduites ici.

Raphaël (Fig. 1) :

«J'ai mis 2 et 2 et 2 et 2 et après il ne restait que la dernière toute seule. Je l'ai mise au milieu. »

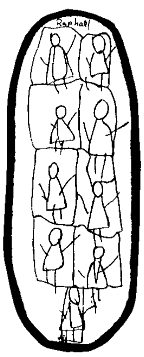
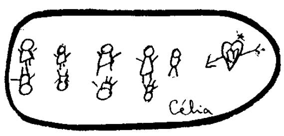


Fig. 1

Fig. 2



1 - Le conflit socio-cognitif ou coopératif

Déjà, à l'accueil de ces premières remarques spontanées des enfants, on sent naître cette combinatoire enrichissante d' « hypothèses » du groupe : une des caractéristiques dans la pratique d'une méthode naturelle de mathématiques.

Une association d'idées peut retenir notre attention :

... et nous on est plus que 9. »
« C'est normal, on est même plus que 10. »

On peut penser que cette expression « c'est normal » révèle déjà une forme première de **pensée déductive,** qu'on pourrait - nous enseignants - formaliser ainsi :

n étant le nombre de garçons,
si $n > 10$ vérité exprimée
$10 > 9$ autre vérité sous-entendue
alors $n > 9$ vérité déduite.

N'est-ce pas là **une inférence déductive,** comme nous en faisons beaucoup dans la vie courante, produite par **une logique interne** propre à l'être humain, que G. Vergnaud qualifie même de « théorèmes en acte » ?

(Le syllogisme, la transitivité... par exemple.)

Célia (Fig. 2) :

Raphaël les a mis(es) l'une à côté de l'autre et moi face à face. »

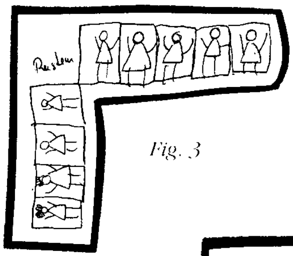


Fig. 3

Dominique (Fig. 4):

« Si 1 ne joue pas, il reste 8. »
Celia :
« Et alors elles peuvent se mettre en face. »

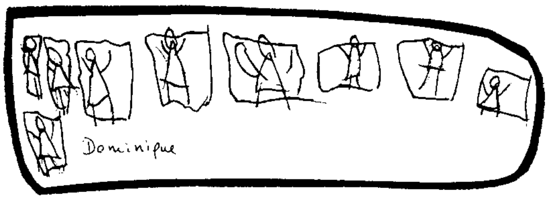


Fig. 4

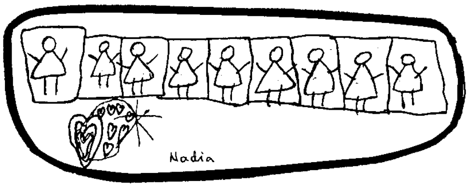


Fig. 5

Nadia (Fig. 5) les a laissées à la queue-leu-leu.

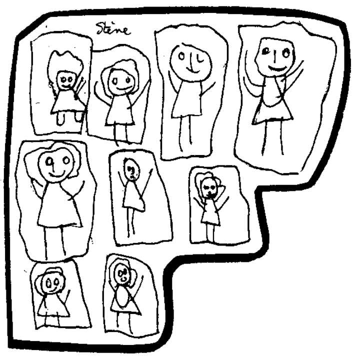


Fig. 6

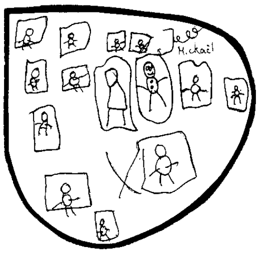
Jean-Marc à propos de la Fig. 6 :
« Stève a fait un escalier. »

Dominique :

« Il y en a toujours un en plus. »,

Stève:

« Non, un en moins !»



ig. 7

« Il y en a trop! »

Michaël (Fig. 7):

- Oui, je sais... mais je ne sais pas compter. »

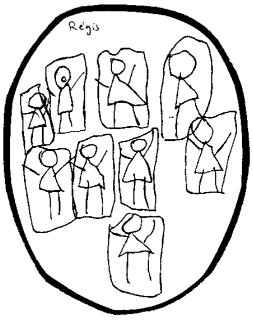


Fig. 8

- Régis les a mises par 2, non par 4. »

Régis (Fig. 8):

-On peut dire les deux manières. Même si je les mets par 2 on voit quand même que c'est par 4. »

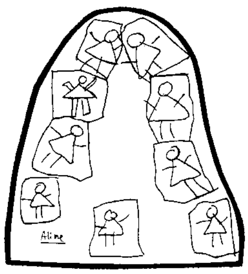
Ces associations d'idées, comme les désaccords, sont la marque **d'un conflit socio-cognitif** fructueux que nous, enseignants Freinet, appelons **co-opération.**

Ici, les différentes « représentations spatiales »(dispositions) s'expriment, se heurtent, se conjuguent, conduisant à une destruction de certaines parfois, à des imitations aussi (1) et (9), (5) et (10), mais encore à des évolutions (10) (11) et (12).

D'ailleurs, l'imitation, fréquente chez les jeunes enfants, n'est-elle pas un processus d'apprentissage ? Les interactions se multiplient, beaucoup nous échappent, mais qu'importe ! Des apprentissages mutuels existent : essais réussis des uns, échecs des autres sont tout aussi profitables au groupe.

Ainsi l'idée d'une ronde (10) qui échoue, reprise par une autre : 3 rondes à 3 conduit une troisième à la disposition en carré (12. Nous avons là une illustration de cette **zone proximale de développement** (Vigotski), fréquente dans nos classes coopératives.

Fig. 9



-C'est la même idée, presque, que Raphaël. »

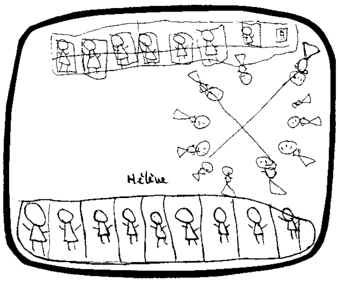


Fig.8

Hélène (Fig. 10) :

«Je voulais faire une ronde mais je n'arrivais pas. Alors je les ai mises en ligne. »

Laetitia :

« Moi, j'ai une idée: on peut faire 3 petites rondes, à 3... et ça fait 9. »

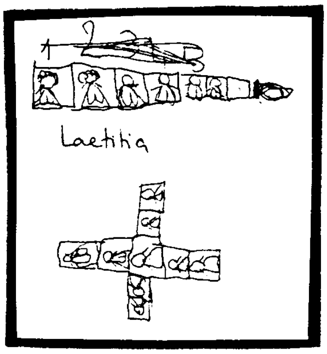
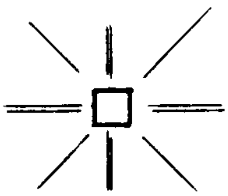


Fig. 11

Laetitia (Fig. 11) :

«Moi, c'est pareil : en vrai j'aurais voulu faire un soleil, mais il en faudrait plus... au moins ... 4 (puis elle réfléchit...) … non, plus! »



Rachel (Fig. 12) reprend l'idée de Laetita en la transformant : elles peuvent se mettre en ligne mais **par 3.**

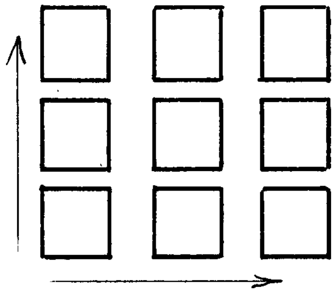


Fig. 12

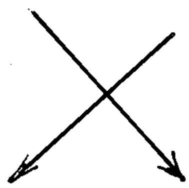
Nadia :

« C'est bien comme ça, il y en a 3 dans ce sens et 3 dans ce sens. »

« Ça fait une forme de carré. »

Régis :

*« **Et même, regardez ça fait 3 en sens de croix.** »*



Ce carré est bien séduisant.

« C'est drôle quand même en mettant 3 dans tous les sens, on peut faire un carré. Ce carré fait 9 en tout.

9 c'est comme le carré de 3 ! » dit Régis.

Quelle intuition !

Nous adoptons cette disposition pour l'envoyer aux correspondants.

> *« **Comprendre c'est inventer ou reconstruire par réinvention.** » J.* Piaget.

Le document envoyé aux correspondants

Deuxième recherche

La présentation des filles étant réalisée, il s'agit maintenant d'en faire autant pour les garçons.

La recherche précédente a été dynamisante puisqu'elle a permis d'aboutir à une représentation non seulement satisfaisante mais, en plus, plaisante.

On se remet donc au travail avec entrain et frénésie.

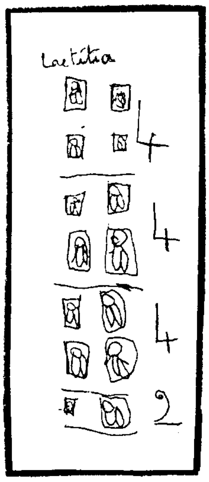
Nous adoptons la même démarche :

- recherche individuelle

-suivie de la mise en commun qui comporte :

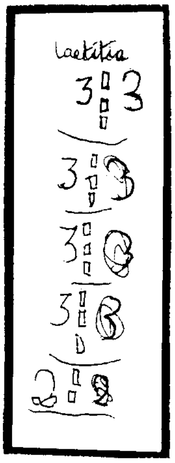
- la présentation de chaque recherche par son auteur
- les questions, remarques et critiques des camarades.

Fig. 13



Laetitia (Fig. 13) :
«J'ai mis 2 et 2 mais par 4. »
Dominique :
« C'est des groupes de 4. »
Raphaël :
« Comme des petits carrés mais à la fin il ne restait que 2. »
Laetitia :
« Tous les garçons ça fait 4 et 4 et 4 et 2 = 14. »
Laetitia (intuition):
« Je crois que j'aurais pu faire des groupes de 3. »
Moi :
« Vas-y. »
(Voir ***Fig. 14*** *sa nouvelle présentation.)*

Fig. 14



Dominique :
- *C'est presque pareil, sauf que là où c'est 3, avant c'était 4.*
Moi :
«Qu'est-ce qui est différent? »
Régis :
« Ici c'est 4 paquets et avant 3 groupes ».
Philippe :
« Le 2 reste pareil »
Olivia :
« Alors peut-être que ce n'est plus 14 en tout ?

Nous vérifions.
« Si, c'est 14 tous les deux »
3 + 3 + 3 + 3 + 2 = 14

Commentaires de deux enfants sur ces deux dernières dispositions

Régis :
«Je sais comme ça s'est passé »
Il explique:
« Si on a 3 paquets de 4 et qu'on enlève chaque fois 1 à ces 3 paquets, il reste 3 dans chaque paquet et on fait un nouveau paquet. Alors au lieu d'avoir 3 paquets de 4 on a 4 paquets de 3.
Célia :
« J'ai déjà vu ça, qu'on peut écrire des calculs comme ça.
4 3
4 3
4 3
2 3
2
au lieu de
4 +4+ 4+2
3 + 3 + 3 + 3 + 2.

Il - L'activité conceptuelle

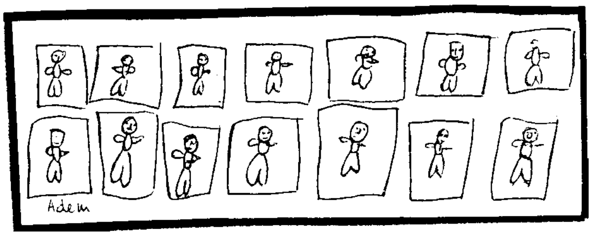
Une situation vivante est souvent multiconceptuelle, c'est-à-dire qu'elle ouvre au groupe d'enfants plusieurs « champs conceptuels » à la fois.

1. La construction du nombre naturel

Les enfants découvrent par eux-mêmes diverses décompositions du nombre 9 :
9 = 3 + 3 + 3
9=2+2+2+2+1
9=4 + 4 + 1
9=*6 + 3*
9=1+1+1+1+1+1+1+1+1
9=5 + 4
9=8 + 1
Nous avons là les tout premiers pas vers des images mentales diversifiées du nombre, une perspective opérationnelle (favorable au calcul mental et au calcul rapide futurs). En effet, ce n'est plus seulement la conception étriquée du nombre dans la suite naturelle: 8+1-> 9+1->10... etc. mais d'autres « compositions » (nommées ici décompositions), d'autres constructions du nombre 9, qui ouvrent sur un champ opératoire plus vaste. On rejoint ici l'esprit même des cahiers de techniques opératoires (catalogue PEMF). Ces opérations mentales-là se réitéreront sans doute à propos d'autres nombres.

2. Les multiples
Les groupements par 2 tentés orientent vers les nombres pairs : 9 et 14 étant le contre-exemple (gênant !) (1) (2) (4) (8) (9) et l'exemple (voir 15) : mais le champ s'étend avec d'autres groupements : par 4, par *3*... (8) et (12) puis *(13)* et (14) vers le concept **de multiple** *(13)* (14) (15).

Aline observant les **Fig. 15** :
« Les deux idées sont pareilles : 2 lignes et 7 dans chaque ligne. Ça fait 7 et 7. »



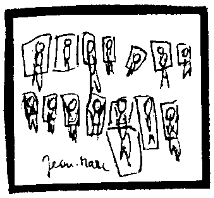


Fig. 15

Alexandre (Fig. 16) :
« J'ai fait 10 dans la ligne et aussi en dessous. Comme ça faisait trop j'ai barré pour avoir 14.
- On peut écrire 10 + 4. »

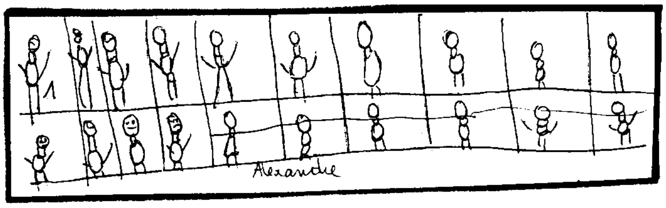
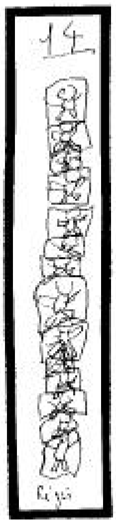


Fig. 16

Fig. 17



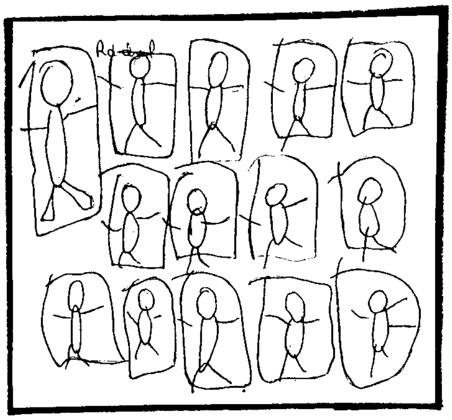
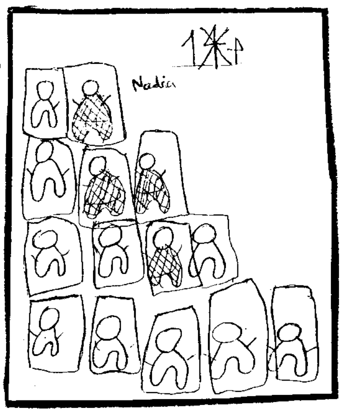


Fig. 19



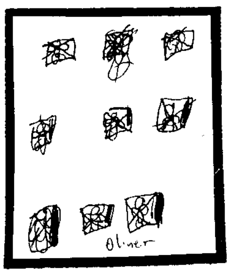
...g. 20

Régis (Fig. 17):
« Ils sont en colonne, une colonne de 14. »

Olivier commentant la **Fig.20 :**

« Cet escalier est plus grand que celui que Stève avait fait, j'ai fait 2 + 3 + 4 + 5. »

Fig. 18



Olivier (Fig. 18) :
«Je voulais faire un carré, mais ça ne va pas. »

Raphaël (Fig. 19):
«J'ai mis 5 en haut et 5 en bas, au milieu 4. »

Aline :
« C'est presque 5 + 5 + 5 puisque c'est 5 + 5 + 4, il en manque que 1. »

Régis :
« Mais oui, Alexandre avaitfait 10 + 4, c'est pareil que 5 + 5 + 4puisque 5 + 5 = 10. »

3. Les propriétés opératoires: **commutativité et associativité** commencent à émerger dans les comparaisons de Régis (13) (14) et (19).
4. **Vers la somme des premiers nombres naturels...**
Une porte s'ouvre aussi, avec la disposition originale en escalier (6), reprise par une autre en (20), sur la somme des n premiers nombres : 1 + 2+3+4... (il suffira d'ajouter le 1 !)

Troisième recherche, quelques mois plus tard...

Dans la recherche précédente plusieurs enfants ont essayé de retrouver le carré d'un nombre, sans y parvenir bien sûr.

Quelques mois plus tard nous reprenons ce travail à nouveau sous forme de recherche.

La question que nous nous posons au départ : ***peut-on faire un carré avec n'importe quel nombre ?***

Essayons.

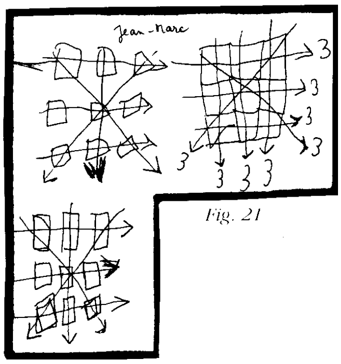


Fig. 21

A nouveau le carré de 3 par Jean-Marc **(Fig. 21)** (répé-tition... nécessaire ?)

Ainsi de suite... répétitions... puis une tentative audacieuse de Célia **(Fig. 25).**

Le carré de 20, un travail qui n'effraie pas l'enfant ! (400 petits carrés !… Y sont-ils tous ?)

Hélène construit l et 7 **(Fig. 22).**

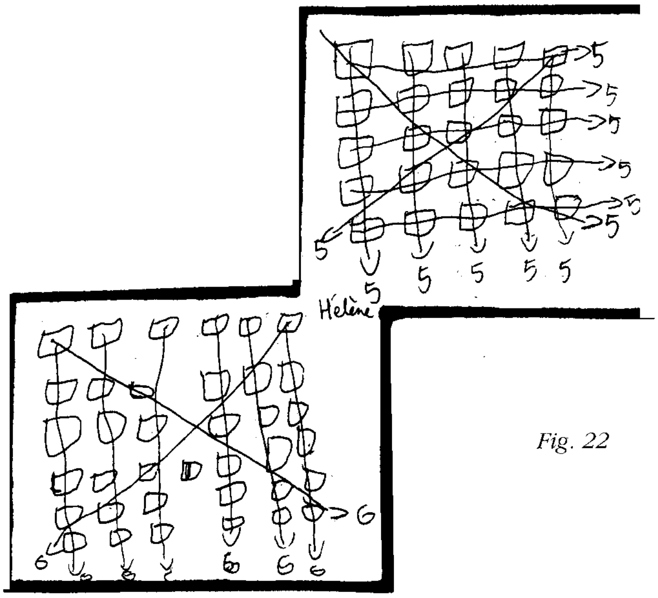


Fig. 22

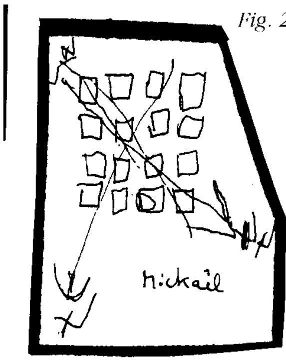


Fig. 23

Carré de 4 par Mickaël **(Fig. 23).**

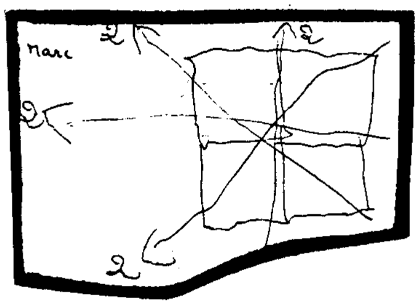


Fig. 24

Le carré de 2 par Marc ***(Fig.24)***

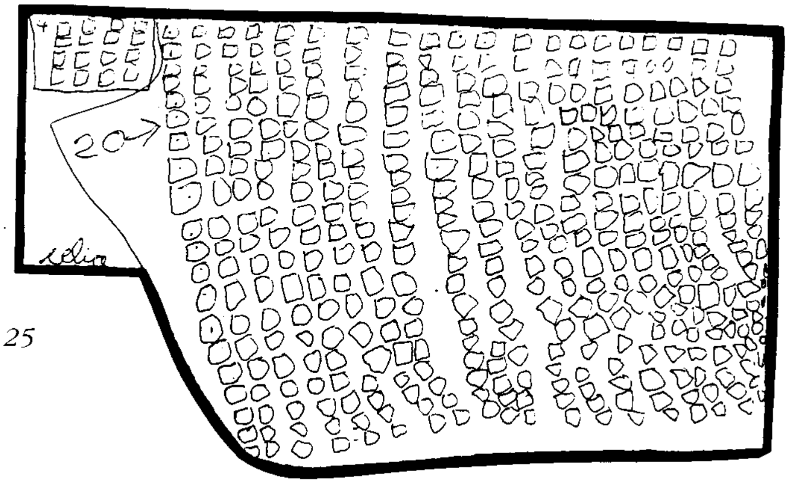


Fig. 25

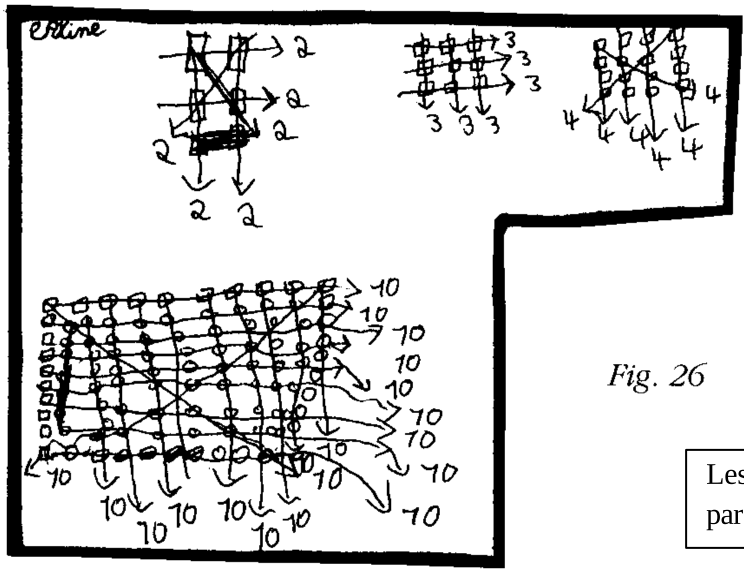


Fig. 26

Les carrés de 2, 3, 4, 10... par Aline **(Fig. 26).**

Chacun, selon ses possibilités du moment, apporte sa contribution à la construction de l'édifice.

Il paraît maintenant sûr que l'on peut faire un carré avec n'importe quel nombre. Mais les réponses trouvées nous montrent que tous les nombres ne figurent pas dans la liste des réponses.

4 est le carré de 2
9 est le carré de 3
16 est le carré de 4
25 est le carré de 5
36 est le carré de 6

ici on loupe beaucoup de nombres	ici les nombres se suivent dans l'ordre

On constate :

14 n'est pas dans la liste des réponses, c'est pour ça qu'on ne pouvait pas faire un carré avec un total de 14.

Conclusion de la recherche:

On peut faire un carré avec tous les nombres mais tous les nombres ne sont pas la réponse d'un carré.

Cette formulation, si elle est maladroite, a l'avantage d'être celle des enfants.

5. L'entrée dans **le champ des fonctions,** par le cas particulier f (x) = x², amorcée avec 9, (12) est lobjet de cette troisième recherche : « **faire des carrés avec les nombres** ». Elle est inattendue dans la mesure où la multiplication et son prolongement : les puissances ne sont pas installées... et pour cause !

Nous sommes au CP !

Par ailleurs, suite à tous ces essais réussis avec 9 (21), 16 (23), etc. (l'exemple) et infructueux avec 14 (18)... (le contre exemple), émerge dans la formulation finale de la « loi trouvée», une propriété fondamentale : tout nombre naturel n'est pas le carré d'un nombre naturel ou n'a pas une racine carrée dans les entiers naturels. Si la fonction f « a pour carré » est une « application » (tout nombre naturel a un carré), sa réciproque f-1 n'est pas une « application » dans N.

6. Par ailleurs, ces dispositions de « figurines » (première et deuxième recherches) puis de leurs représentations symboliques (troisième recherche) proposées par les enfants constituent, par leur nombre et leur diversité, sur le plan manipulatoire et visuel (deux canaux importants dans la saisie de l'information), une activité fondamentale de nature géométrique : **orientations et organisations spatiales dans le plan,** prélude au repérage, aux configurations de points... (alignements horizonaux, verticaux... en escalier... en rond... en carré... en rectangle... etc.)

7. Enfin, certaines « erreurs », peuvent ouvrir de nouvelles perspectives (1). Ainsi, les schémas en rectangles (28) (29) et (30) n'ouvrent-ils pas la voie de la multiplication ?

8. La formulation « maladroite » finale de la « loi trouvée », une manifestation de la réversibilité de la pensée, est en réalité le passage obligé par **un savoir privé** pour atteindre plus tard à **un savoir public.**

(1) Voir dossier du Nouvel Éducateur n°41 « L'échec pour combattre l'erreur » par Jany Gibert.

Les erreurs ?... des points de départ pour de nouvelles recherches

Et les erreurs ?... Il y en a, bien sûr, de diverses natures : erreurs de comptage, erreurs de structuration, les deux à la fois...

Erreurs de comptage dans la première recherche (7) et (27):

Virgile :
« *Jackson, Mickaël et Leila ont raté.* »

Rustem:
« Si on compte bien, chez Jackson il y a 14. Il a raté que 1 fois. »
- C'est trop.»

Erreurs de structuration:
Certains ont remarqué qu'au lieu de faire des carrés, ils ont fait des rectangles (28), (29), (30).

Erreurs de structuration et comptage (29):
Erreur... ou déviance ?
Ces erreurs seront mises à profit en étant le point de départ d'une nouvelle recherche.

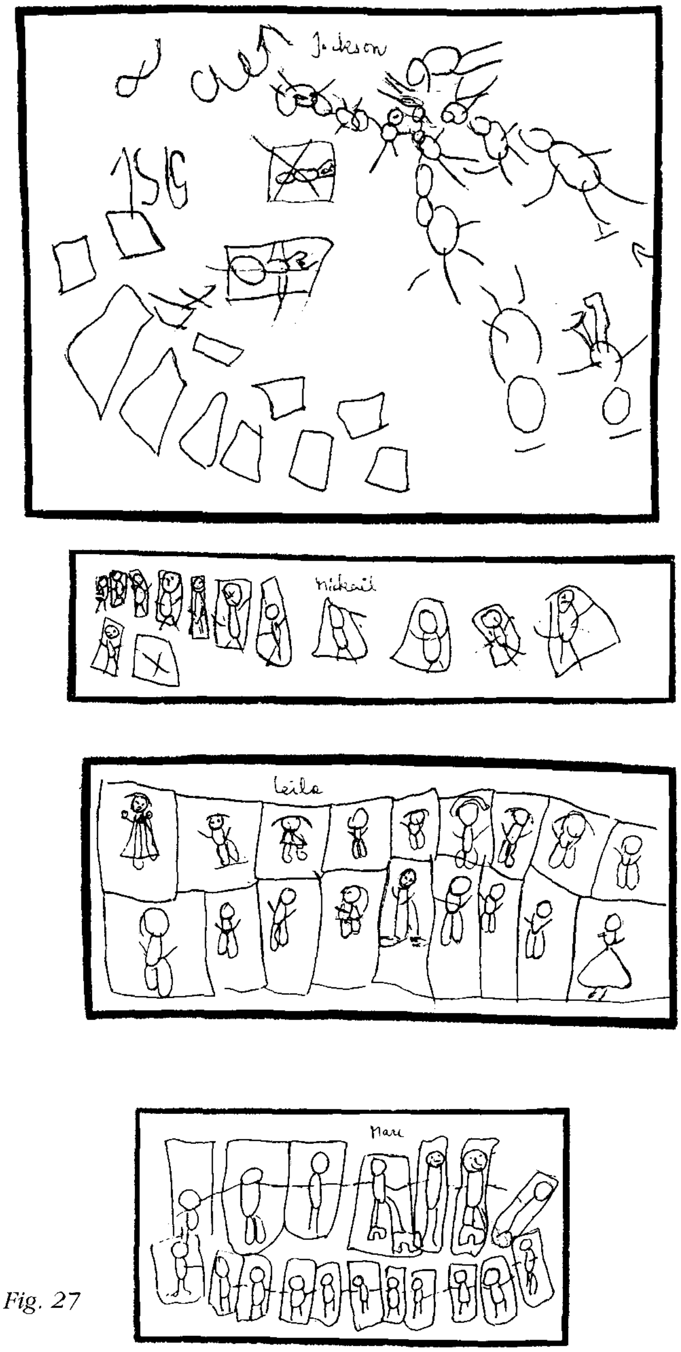


Fig. 27

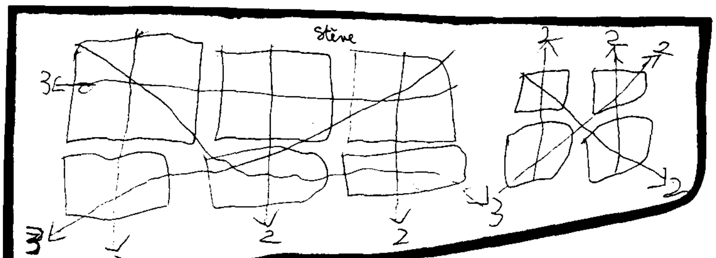
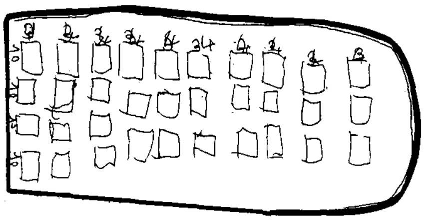


Fig. 28



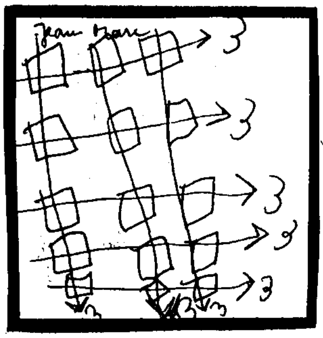


Fig. 29

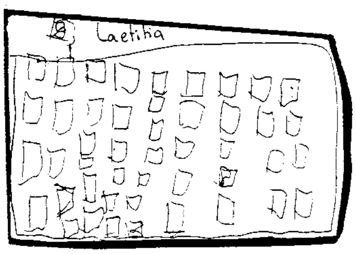
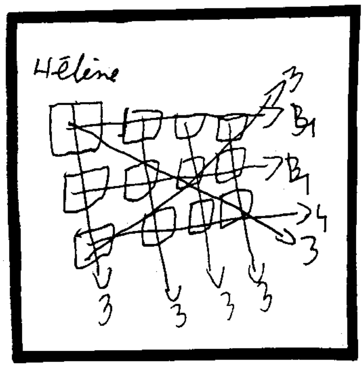


Fig. 30



Ce travail, avant d'être une recherche mathématique, était une situation, un problème qui se posait à la classe : il s'agissait de se présenter réellement aux correspondants en respectant le contrat moral que nous avions passé (les travaux envoyés aux correspondants doivent être parfaitement présentés et soignés).

Comme il n'était pas possible de s'appuyer sur un manuel, il fallait compter sur nos propres ressources et inventer jusqu'à la démarche. C'est peut-être la raison pour laquelle ce travail nous passionnait, les enfants autant que la maîtresse. Cette forme de travail me semble intéressante car elle conjugue les individus et le groupe, le travail des uns se nourrissant du travail de l'autre

Anne -Marie Mislin

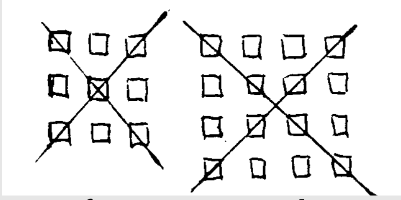
9. Et la part du maître ?...

Même si elle est discrète, elle existe assurément : suggérer par une question, faire le point, relancer la recherche, organiser le travail. (Voir par exemple p. 21.) En voici quelques aspects précisés :

La maîtresse reformule le «problème » qui se pose à la classe. (Voir par exemple p. 19.)

Les phrases accompagnant chaque dessin, même si elles étonnent parfois (comme dans la Fig. 19), sont rigoureusement celles des enfants. Elles résument la présentation de leur production et/ou les réactions critiques des camarades.

Incitation à cette reprise, par la maîtresse : voir page 24. Elle s'est faite à l'occasion d'une communication de Jean-Marc, celuici ayant remarqué sur les « carrés » qu'il a construits :



« Des fois ça se croise dans une case, et des fois ça se croise au milieu des cases. »

Incitation qui aurait tout de même été faite par la maîtresse, sans cette occasion, celle-ci se fondant sur l'idée qu'un savoir n'est jamais clos, que prolongements et rebondissements sont toujours possibles. En effet, c'est une construction spiralaire des concepts (voir page 28 les commentaires à ce sujet).

Question formulée par la maîtresse page 24.

On remarque page 24, dans la troisième recherche, avec l'abandon des silhouettes pour un schéma symbolique (petits carrés), (induit peut-être par la maîtresse qui reprend la conclusion de la première recherche), une évolution vers une recherche plus abstraite, plus détachée du concret.

En effet, cette part du maître, variable mais sous-jacente, consiste, comme le formule Anne-Marie Mislin :

- à aider l'enfant à faire tout seul, comme disait Maria Montessori ;

-à lui permettre d'apprendre en respectant ses démarches personnelles ;
-à permettre « aux savoirs » de circuler, se heurter, s'ajouter en organisant le débat d'idées, les dialogues socio-cognitifis ;
- à organiser l'archivage des travaux ;
-comme une idée peut en cacher une autre à débusquer les idées cachées ;
-à montrer le plaisir que l'on prend à travailler ainsi ;
-à considérer que les vérités, les savoirs sont provisoires et permettre aux enfants de le vivre.

10. Faut-il toujours se préoccuper de tous ces champs conceptuels ouverts à l'occasion d'une «situation-problème » vécue ?

Si l'on se réfère aux recherches contemporaines sur la conceptualisation (1) comme les travaux de J. Piaget, J. Bruner, Z.-P. Diénes (2)... on découvrira:

- d'une part, **qu'un concept ne se construit jamais seul** mais en réseau avec d'autres (une construction de savoirs en toile d'araignée disent certains). Ce document en est un exemple ;

- d'autre part qu'un concept se construit :

* **par accumulation d'exemples et contre-exemples.**

Cette construction de l'abstraction par la vérification de l'inférence hypothétique (3) est tout à fait naturelle dans une démarche tâtonnée régulée (4).

* **par approximations successives,** de manière spiralaire, dans la durée, avec une alternance de pauses structurantes et de nouveaux passages dans son champ.

La troisième recherche nous révèle bien cette démarche : quelques mois plus tard «faire un carré avec des nombres » est une reprise. Mais celle-ci se fait déjà à un niveau conceptuel moins concret, par schémas symboliques où « la somme des petits carrés intérieurs donne le carré du nombre : avec le nombre choisi 5 il y en a 25 », sans passer par la multiplication.

Les connaissances apportées par les recherches de la psychologie cognitive comme celles des neurosciences sur le fonctionnement du cerveau en apprentissage, nous confirment que l'essentiel est d'offrir à l'enfant, à l'apprenant en général, des « espaces expérienciels » semblables et de laisser « se faire I'itinérance », sans exclure le compagnonnage.

(1) Voir dossier n' 235 du Nouvel Éducateur, 1991-1992.

(2)Construction des mathématiques, Z.-P. Diénès, PUE

(3)L'apprentissage de l'abstraction, Britt Mari Barth, Retz.

(4) Dossier n°230 du Nouvel Éducateur, 1991-1992

.