

La recherche libre en mathématiques

Comment accueillir en classe les événements à connotation mathématique ?

Comment passer du calcul vivant à la mathématique vivante ? Peut-on construire les concepts mathématiques grâce aux petits et grands événements de la vie quotidienne de la classe ? L'an dernier nous présentions deux entrées possibles à la mathématique naturelle : la recherche et la création (1). Dans ce numéro, Michel Marciniak et Marcel Thorel* développent une recherche mathématique dans son ensemble : traitement d'un événement mathématique, proposition d'une finalité, d'une trajectoire et d'une dynamique.

Naissance d'une recherche libre mathématique



(1) *Le Nouvel Éducateur* n° 96, février 1998.

Plan du dossier

- | | |
|---|---|
| 1) Phase de sensibilisation au phénomène. | 4) Phase de reproduction du phénomène sans « machine ». |
| 2) Phase de reproduction du phénomène avec une « machine ». | 5) Phase de réinvestissement. |
| 3) Phase d'exploration du phénomène. | 6) Prolongements. |

Le point de départ fut un texte de Bertrand (5 ans) dans lequel il présentait un drôle de papa : une oreille ronde, l'autre carrée, un petit bras et un grand bras, un bras bleu et l'autre rose.

La symétrie du corps semble bien intégrée puisque le jeu des drôles de papas consiste justement à la déjouer.

Phase de sensibilisation au phénomène

1) Des événements en classe

origine : textes, lectures, informations, « quoi de neuf ? », apport d'enfants, créations.

2) Un événement qui a attiré l'attention d'un individu, du groupe.

3) Discussion dans le groupe-classe ou relation adulte-enfant si intérêt, étonnement, questionnement, avenir possible.

4) Suivant l'orientation de la discussion dans le groupe et les possibilités « d'accueil » de l'enseignant, l'événement va prendre une coloration plutôt biologique, ou philosophique, ou mathématique, etc.

Si les lunettes math ont été choisies pour aborder cet événement, ce sera une recherche mathématique.

.../...

* Michel Marciniak et Marcel Thorel sont instituteurs à l'école de Fouquereuil (Pas-de-Calais), et membres de l'Institut artésien de l'École moderne.

.../...

5) Première emprise sur l'événement

Dans le groupe, on évoque différentes possibilités de premières actions qui aideront le chercheur à démarrer :

- reproduire tant bien que mal l'événement lui-même, produire d'autres habillages (drôle de papa puis drôles de papillons...).
- Cette première appropriation par la reproduction du phénomène peut se faire par le dessin ou par d'autres moyens : construction, collage, argile...
- recherche sauvage.

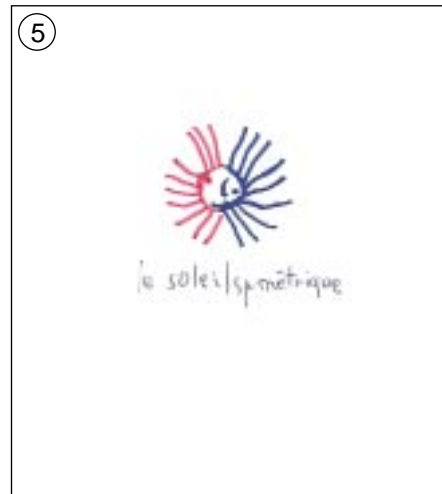
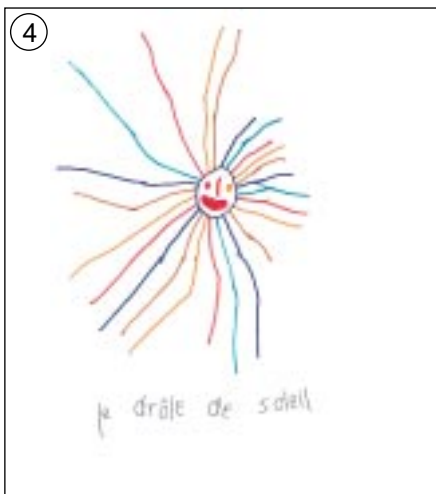
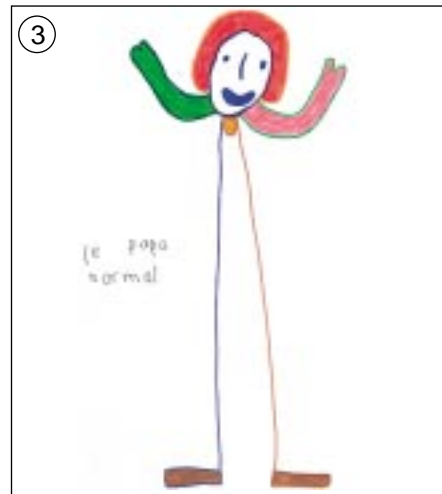
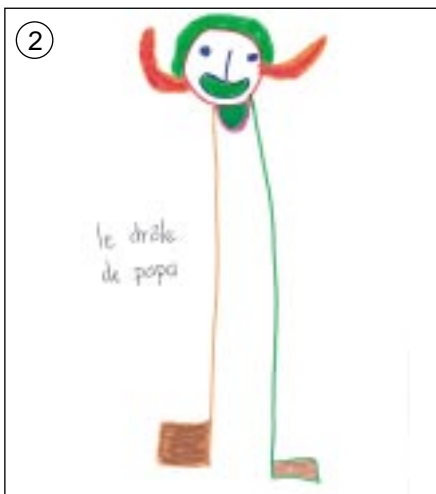
Michaël, 6 ans à peine, a repris à la suite de la présentation de Bertrand l'idée que celui-ci avait laissée de côté momentanément pour une autre recherche.

Voici donc le drôle de papa de Michaël :

« Il a une chaussure plus grande que l'autre. »

Ont suivi les drôles de fleurs, de papillons, de soleils, d'oiseaux, etc.

Puis le papa normal, baptisé papa symétrique, le papillon symétrique.



Jusqu'à présent, l'objet de la recherche n'est pas encore déterminé avec précision.

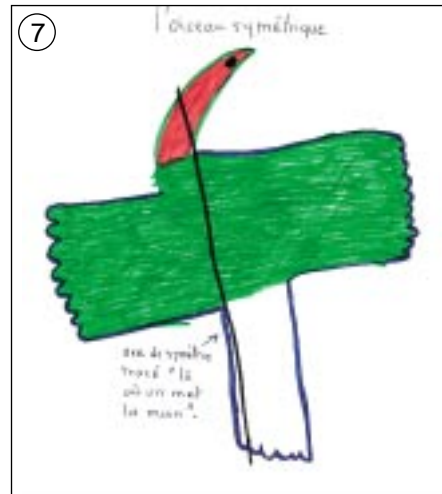
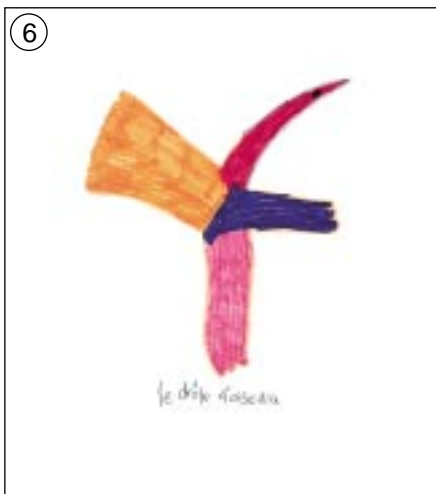
Michaël peut donc, en se référant à cette connaissance de la symétrie du corps qu'il a dû se construire alors qu'il était bébé et qui a dû se renforcer lors de l'apprentissage de la marche, dessiner un drôle d'oiseau (une aile plus grande que l'autre) ou un oiseau symétrique.

Après observation plus précise, force est de constater que ce n'est pas « pareil » de chaque côté, le « pareil » restant pour l'instant une expression floue. Bien sûr, l'exploration de la signification de ce pareil amènera à la découverte des invariants de la transformation.

Nouveaux essais pour affiner l'oiseau symétrique.

On dit « pareil de chaque côté », mais où sont les deux côtés ? Où est la limite ? Michaël place sa main pour me montrer. Mais dès que la main est retirée, il n'y a plus de trace... Il dessine donc une ligne qui sera immédiatement appelée axe de symétrie.

Nouveaux essais, puis je lui propose



de ne dessiner que la moitié de l'oiseau (en bleu) et de compléter ensuite la partie symétrique (en rouge).

Après examen du résultat, des imperfections subsistent encore : le bec de la moitié « objet » (droite) est plus haut que celui de la partie image (gauche). L'aile est trop petite, la queue, ça ne va pas. La « machine » dessin à main levée montre ici ses limites. Il faut en trouver une autre, plus performante.

Une stratégie se dessine : pour que les deux côtés soient « pareils », il faudrait amener la partie bleue de l'autre côté. On fait donc un pli le long de l'axe de symétrie et on admet que pendant l'opération de rabattage de la demi-feuille, la partie bleue ne subit aucune transformation de type agrandissement ou diminution. Pour reporter le contour bleu, on utilise une pointe de compas et on « décalque » en perçant des trous. Il n'y a plus qu'à repasser en suivant les petites perforations.

Michaël s'entraîne à cette technique nouvelle. Je lui propose deux dessins à compléter (papillon, oiseau) puis il continue tout seul. Il fait beaucoup d'autres exemples.

Michaël présente et explique sa recherche.

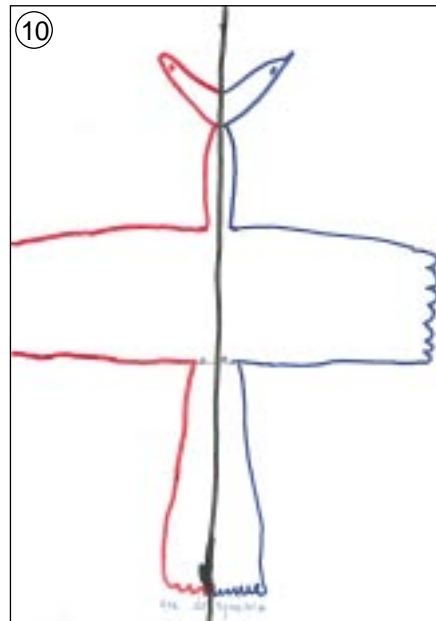
(A ce moment-là les axes de symétrie ne sont pas encore tracés)

Pour les premiers dessins, Michaël parle de « pareil des deux côtés », « pas pareil des deux côtés ». Légère hésitation d'Amandine qui pose la question : « mais où sont les deux côtés ? »

Apparaît alors la nécessité de montrer où on place la main à chaque fois, ou mieux, de tracer l'axe de symétrie. C'est ce que Michaël va faire par la suite, sur les premiers dessins (**ligne noire**).

Puis Michaël explique la technique utilisée pour avoir des dessins bien symétriques. Chacun veut essayer.

De nombreux objets symétriques sont produits soit à partir d'un demi-dessin à compléter, soit librement. Produire soi-même la première moitié du dessin est une activité qui réserve de nombreuses surprises et amène de nouveaux éclairages sur le phénomène.

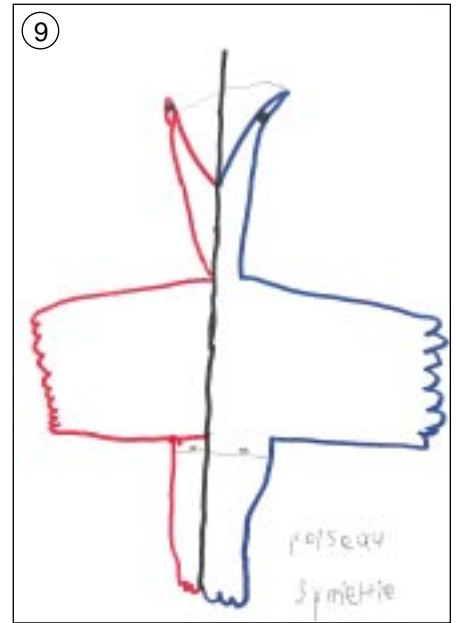


Le symbole $\overline{O-A-O}$ a été placé sur ces dessins ultérieurement (voir p. 11).

A ce niveau de la recherche, nous renvoyons le lecteur au fichier de géométrie de transformation cycle II édité par les PEMF.

Il faut souligner que cet outil programmé, conçu par le groupe Freinet du Pas-de-Calais et le chantier Outils de l'ICEM, a pour origine la recherche libre. Ce fichier propose une approche des quatre transformations : translation, symétrie, homothétie, rotation, à partir de gestes fondamentaux tels que report de figure par pochoir, tracé de contour, découpage, transparence, quadrillage.

A ce moment de la recherche, on peut donc très bien utiliser le fichier qui offre de multiples machines pour reproduire le phénomène constaté.

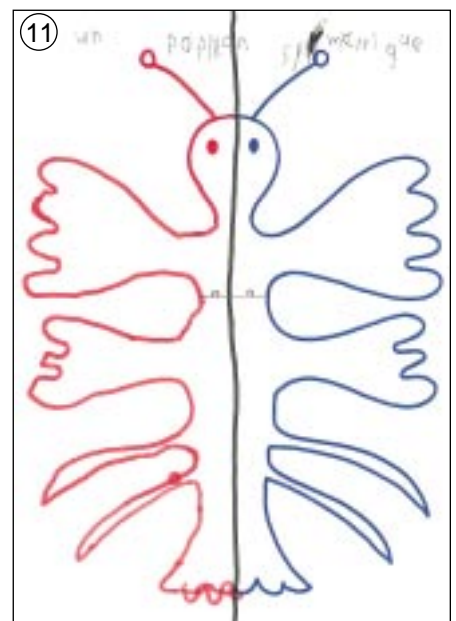


Découverte d'une « machine* »

La « machine » peut être apportée par l'enseignant.

Exemples : une machine traçante comme le pantographe pour les homothéties, une calculatrice pour les fonctions numériques, un disque en carton (style disque de stationnement) pour les fonctions périodiques.

* machine : technique opératoire matérielle



Reproduction du phénomène

à l'aide d'une « machine » plus performante

Appropriation de la machine : la faire fonctionner

a) Collecte et conservation des données

– accumulation des données fiables, utilisables ;

– intégration semi-consciente des variants et invariants du phénomène (ici, parallélisme, perpendicularité, équidistance) ;

– expérience intuitive, vision.

b) Premières exigences

– dire ses premières remarques, ses bribes de savoirs, ses représentations hésitantes à l'adulte, au voisin, au groupe (présentation).

Première présentation à la classe

a) Apport du groupe :

premières questions, exigences du groupe, confrontation aux représentations des autres.

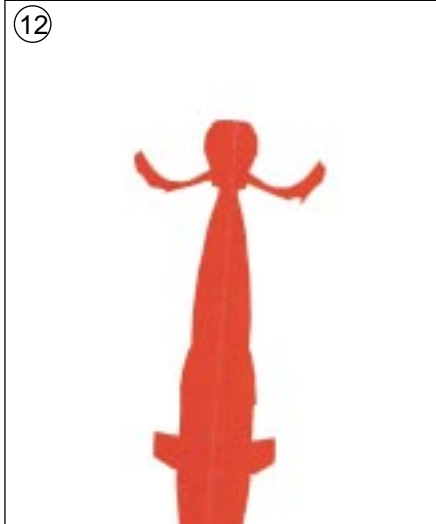
La nécessité de la communication demande de la clarté, de la précision, et par conséquent la levée de certains implicites (ici, matérialiser l'axe de symétrie).

b) Apport au groupe :

le groupe profite du travail d'un individu.

c) Nouvelles pistes de recherche.

12



Une autre machine est découverte : le pliage découpage

Des monstres naissent.

Quelquefois des silhouettes plus familières apparaissent : araignées, aigle ou... fantôme.

Peu à peu, on passe à l'idée que de vrais animaux ou vrais objets possèdent un axe de symétrie.

Le premier exemple trouvé est l'enfant (Bertrand). On montre l'axe.

On vérifie les correspondances : œil-œil... puis on part dans la classe à la recherche d'objets ayant un axe de symétrie.

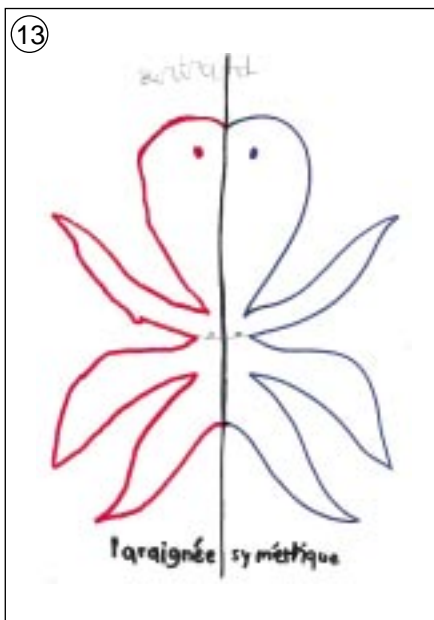
Un bonhomme sur une peinture, puis une étagère, une autre étagère, la fenêtre. Les correspondances sont constatées.

Nous avons découvert un objet qui possède deux axes de symétrie.

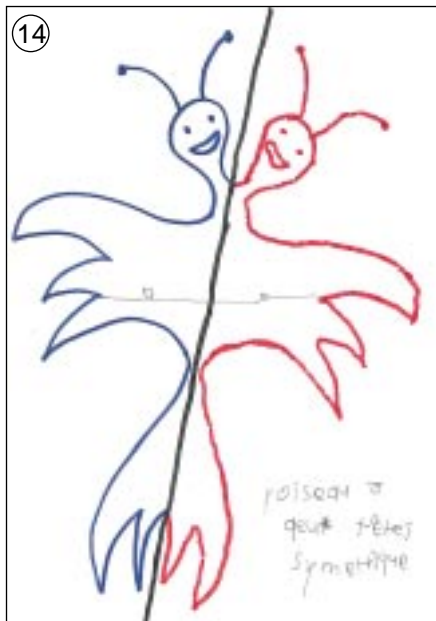
Y en a-t-il d'autres ? Oui : le tableau...

Et le seau d'eau ?

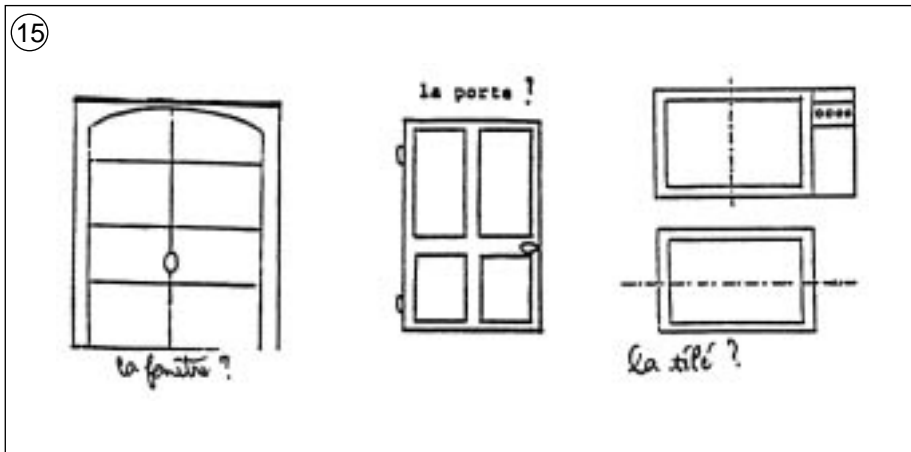
13



14




15



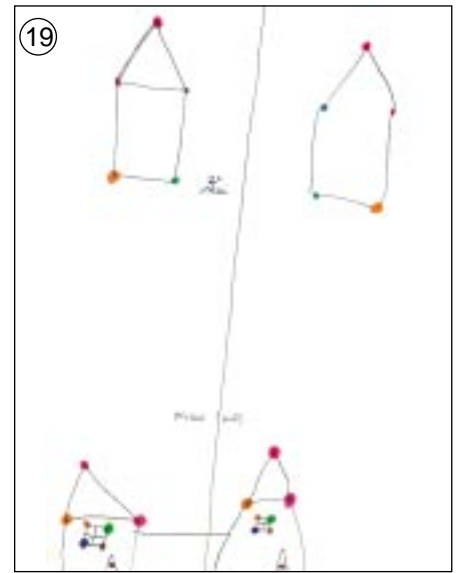
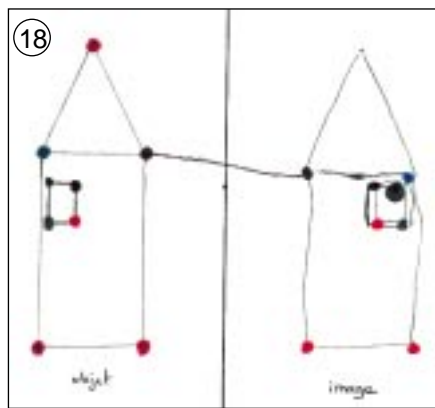
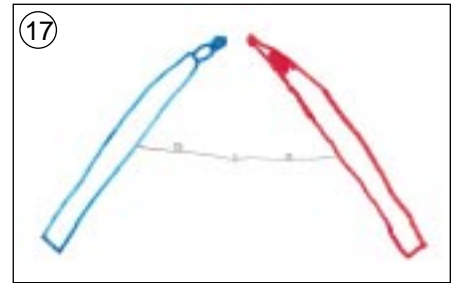
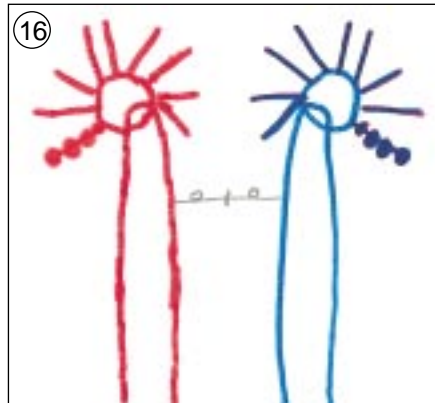
Changement du regard de chacun : on observe les objets quotidiens avec l'œil du mathématicien chercheur d'axes de symétrie.

La technique pli-pointé est réutilisée lors de nombreux exemples.

Les exemples ci-contre attirent l'attention sur les problèmes d'orientation : la branche avec les feuilles, le crayon. Les pointes sont rapprochées, les bouts éloignés.

Peu à peu, après de nombreux tâtonnements par le dessin ou avec une machine, les premiers invariants se « conscientisent ». Avec les deux doigts écartés, Michaël me montre que les distances entre pointes de stylo et axe de symétrie sont les mêmes. Même chose pour les bouts de stylo. Et il renouvelle sa remarque pour d'autres exemples. Il symbolise cela par  (voir dessin ci-contre).

Ce premier invariant découvert va être utilisé pour s'affranchir peu à peu de la machine. Je lui propose une maison-objet, à lui de dessiner l'image sans pliage-pointé. Les deux doigts qui montrent l'égalité des distances peuvent bouger pendant « le transport », on décide de prendre une bande de papier, de noter la grandeur et de la reporter.



Retour à la recherche individuelle

La recherche libre se développe dans une alternance entre un travail individuel, des présentations à un groupe et des aller-retour entre le chercheur et l'adulte qui, dans ces tête à tête, doit s'assurer d'une communication la meilleure possible (écoute active, facilitation, empathie...).

Cette situation n'est pas sans rappeler la maman avec son bébé qui apprend à parler : les premiers gazouillis accueillis chaleureusement et renvoyés comme des réussites... « Il sait dire maman ! »

Exploration du phénomène

1) Définition de l'objet de la recherche.

L'événement mathématique quitte son statut de simple événement remarqué pour celui d'objet de recherche.

– Le ou les défis à court terme sont posés

• d'entrée

• ou successivement selon les situations dans le temps.

C'est la découverte des invariants.

Ici la notion d'axe, d'équidistance, puis de perpendicularité.

– Le déficit à long terme (maîtrise du phénomène) est sous-jacent.

Ici « je sais produire une symétrie axiale ».

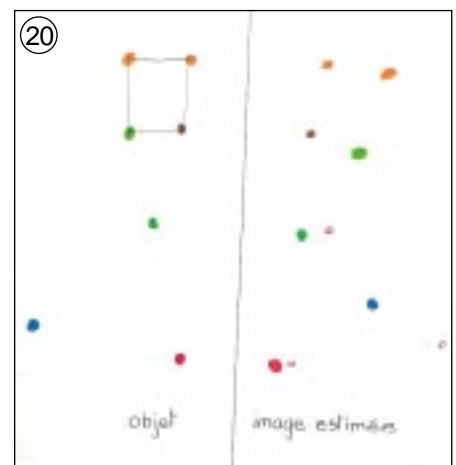
2) Organisation si nécessaire des données accumulées (classements...).

3) Découverte des variants et invariants de la situation.

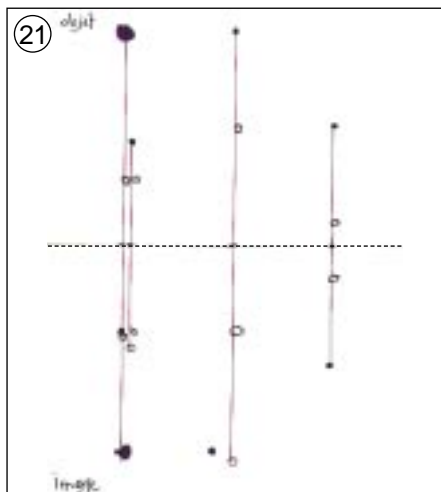
4) Construction d'une technique opératoire, d'un mode d'emploi, d'un savoir-faire libéré de la « machine », de l'outil matériel.

Michaël se donne une figure avec ses quatre sommets. Puis je lui propose trois points et lui demande d'estimer la position de leur image, puis de vérifier avec le pliage-pointé et enfin avec le papier (les distances).

Michaël travaille seul et décide de l'objet : une maison. Un premier essai montre qu'il a plus confiance dans le dessin que dans sa nouvelle technique. La symétrie n'a pas encore son statut de transformation ponctuelle. Deuxième essai avec moi pour découvrir quels sont les points stratégiques pour obtenir l'image. (On admet ici que l'image d'un segment est un segment. En effet, l'image d'un toit, c'est un toit).



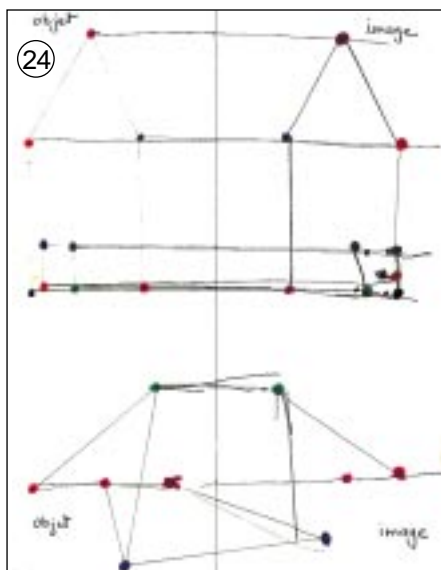
Il s'essaie à de nombreux exemples de ce type (voir dessin ci-dessous).



L'axe de symétrie était matérialisé par un pli, ici représenté par une ligne pointillée.

Utilisation de la machine papier* (égales distances). La figure du bas ne le satisfait pas : certains points ne sont pas à la même hauteur.

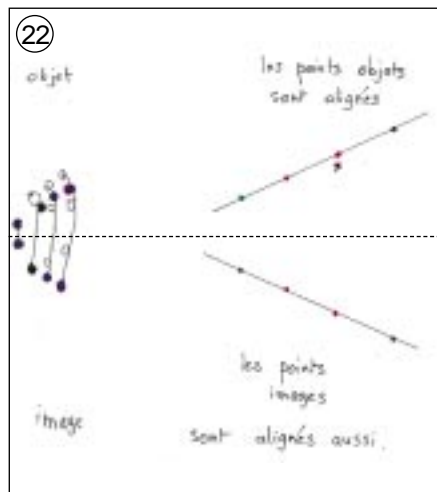
* machine papier : une bande de papier pour reporter des distances.



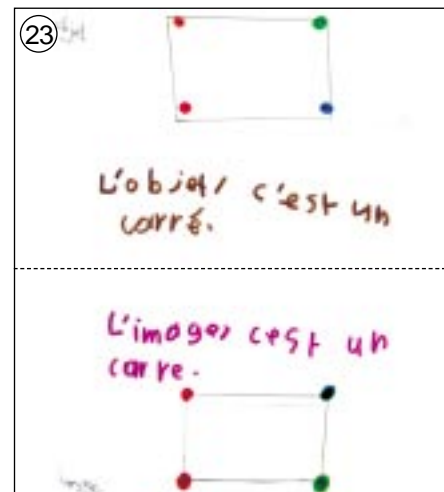
Reproduction du phénomène sans machine

- 1) Utilisation de la technique opératoire élaborée à partir des invariants découverts.
- 2) Vérification, à l'aide de la technique opératoire, qu'une situation est du même type que l'événement étudié (est-ce une symétrie ?).

Une découverte fortuite (?) : les images de points alignés sont des points alignés.

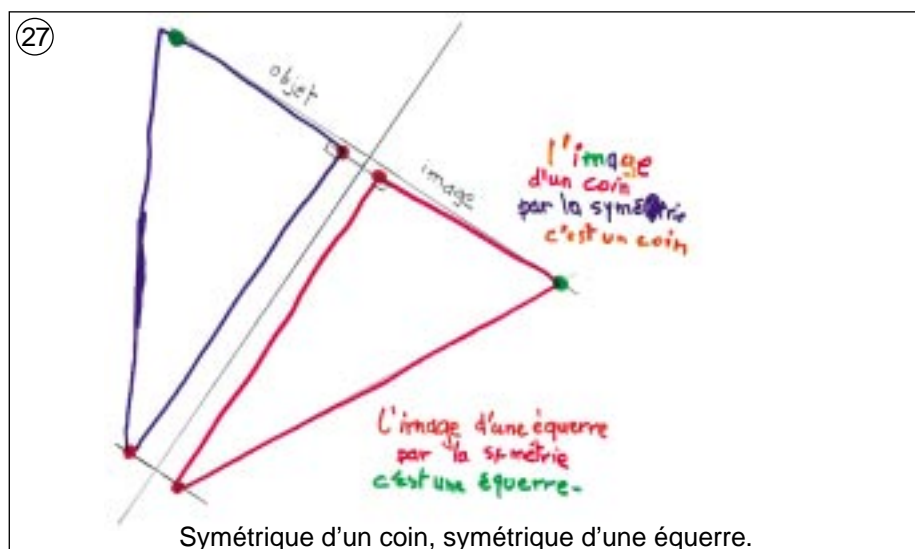
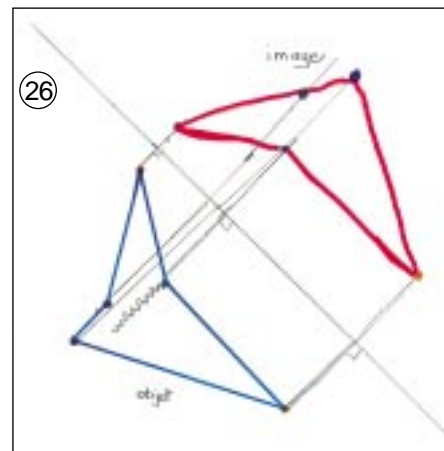
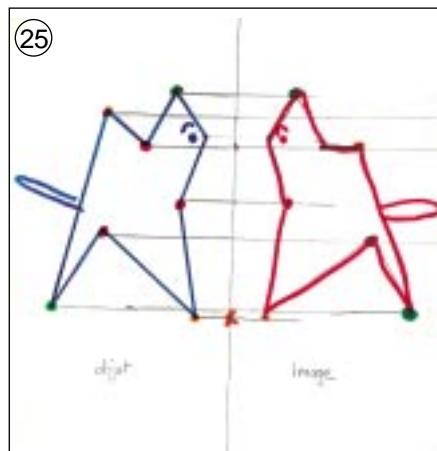


Et l'image du carré ?



J'introduis le deuxième invariant : l'angle droit avec l'axe de symétrie. On utilise le coin de l'équerre.

Utilisation du papier (report de longueur) et du coin de l'équerre.



Phase de réinvestissement

- 1) étude d'objets de la vie courante
 - 2) reconnaissance de situations similaires
- utilisation pertinente de la technique opératoire.

Là, intervention de Bertrand qui, lui, a travaillé sur les translations.

Bertrand : l'image n'est pas pareille.

Moi : ?

B. : Si je prends l'image et si je la mets là (sur l'objet), ça ne va pas. Le coin ne va pas.

Moi : Quel déplacement fais-tu ?

B. : Comme sur la tapisserie (translations).

Moi : Mais là, est-ce la même transformation ?

B. : ?

Moi : Comment fais-tu Michaël ?

N. : Je plie. C'est pour ça que le coin est comme ça.

Encore et toujours, il faut se frotter à l'autre, à ses représentations, à ses savoirs, à ses sollicitations...

Prolongements

- 1) autre exploration possible menant à une autre technique opératoire (ici : symétrie sur quadrillage) ;
- 2) étude du phénomène inverse ;
- 3) composition du phénomène avec lui-même (Sym * Sym), avec le phénomène inverse, avec d'autres phénomènes du même type, de type différent (ex : Symétrie * Translation) ;
- 4) optimisation de la technique : vers les procédures expertes ;
- 5) expression de l'équation du phénomène (ici : matrice).

Les plus grands avaient déjà pris l'habitude, à la suite de l'étude d'une fonction, de la faire fonctionner plusieurs fois, à l'aide de la loi d'association *.

Exemple : $(+2) * (+2) * (+2)$

Michaël me dit :

« J'ai fini. Je sais bien faire les symétries maintenant. »

M. présente son travail à la classe. Je profite de l'occasion pour relancer : « Tu sais, Michaël, les grands, quand... »

C'est reparti. Il va composer deux symétries axiales.

Résumé de la démarche

Le cheminement naturel suivi par Michaël pour cette transformation géométrique, nous l'avons retrouvé dans d'autres recherches d'enfants sur d'autres sujets (non-numériques, numériques...).

Phase de sensibilisation au phénomène. Un événement de la vie de l'enfant, de la vie de la classe a été rapporté. Il a suscité l'intérêt. Il est devenu (ici) un événement mathématique. Une première emprise sur l'événement a lieu : essai de reproduction, recherche sauvage...

Phase de reproduction du phénomène avec une « machine » (technique opératoire matérielle).

On collecte les données, on les conserve. Les premières caractéristiques du phénomène émergent lentement.

Phase d'exploration du phénomène.

L'activité du chercheur devient plus « méthodique ». L'objet de la recherche est maintenant défini. Les données sont organisées, des variants et invariants découverts, une technique opératoire du phénomène (ici : savoir faire une symétrie axiale) construite.

Phase de reproduction du phénomène sans « machine »

La nouvelle technique opératoire est utilisée : on mesure l'étendue de son nouveau savoir, de sa puissance.

Phase de réinvestissement

Avec ce nouveau savoir, on peut traiter d'autres événements de la vie, classer et créer des équivalences d'événements.

Prolongements

Étude du phénomène inverse, composition de phénomènes : vers les groupes mathématiques et autres grandes structures (voir collège, lycée et plus...).

Et surtout...

Une phase plus transversale, présente pendant et à la fin de la recherche, une phase primordiale dans la construction du savoir :

– L'analyse par tous les acteurs (enfants, groupe, adulte) des démarches :

- celles qui ont été abandonnées ou rejetées

- celles qui ont réussi.

– Et leur réinvestissement ultérieur possible pour des événements similaires (ou considérés comme tels : là aussi de nouvelles recherches s'imposent). Ce recueil d'actes réussis est la base de l'élaboration de ce que nous appelons **les routines**.

(Pour plus de précisions voir *Le Nouvel Éducateur* n° 96, ainsi que la revue *Ch'ti Qui*)

Conclusion

A travers la démarche de Michaël sur les drôles de papas, nous avons présenté un cheminement d'enfant. L'analyse de nombreuses autres recherches libres d'enfants en mathématique a mis en évidence un certain nombre d'invariants que nous appelons routines. Ainsi, il existe une routine pour l'étude des relations d'équivalence, des fonctions non-numériques, des lois, etc. : une vingtaine en tout.

Cependant :

– nous n'avons fait ici qu'évoquer rapidement les conditions matérielles, pédagogiques nécessaires à la naissance et au déroulement d'une recherche libre :

– la part du maître mériterait également un développement plus important.

– l'accès à l'autonomie de l'enfant en recherche libre par la construction des routines ainsi que le rôle de celles-ci dans la construction des savoirs n'ont été qu'effleurés.

C'est la conjonction de ces différents facteurs qui permet l'éclosion de la recherche libre mathématique.

Michel Marciniak, Marcel Thorel
École de Fouquereuil
 62232 Fouquereuil

Email : ecole.fouquereuil@wanadoo.fr

Bibliographie :

Le Nouvel Éducateur n°s 44, 47, 60, 76, 77, 85.
 « Mathématique et processus d'apprentissage : quels défis ? » Dossier du *Nouvel Éducateur* n° 96.

Les Ch'ti Qui spécial math : « représentations, propriétés, relations », « les nombres », « les fonctions », 50 F l'unité. Contact : Cathy Castier
 2 rue du Long Chemin 62910 Serques.

Pour aller plus loin :

– Chantier math de l'ICEM
 contact : Nathalie Chaumeron, 2, Sente Adam - 28410 Havelu