

Recherche mathématique en maternelle (*)

Michèle COMTE
Marmoutier, Bas-Rhin

Sommaire :

Économie et contenu du dossier.....	page 39
Environnement et genèse de l'expérience réalisée David dessine un cube	page 39
Découverte en écho. Récit et analyse Gaël fabrique un dé	page 40
Deuxième rebondissement. récit et analyse Gilles veut dessiner un cube.....	page 41
Nouveau défi. Récit et analyse Vers le développement du cube	page 41
Considérations pédagogiques et théoriques.....	page 43
Conclusion	page 44

Économie et contenu du dossier

Le propos de ce dossier est de relater comment, à partir de l'apport spontané d'un enfant, («*Je sais dessiner une boîte*»), un groupe d'élève entreprend **un cheminement mathématique** dans le domaine de la géométrie du plan et de l'espace.

À travers leurs comportements sont étudiées et analysées les compétences sollicitées, et comment celles-ci évoluent au fil des séquences. De **représentations «magiques»**, nous assistons à une réflexion qui les amèneront à des **représentations pensées**, confrontées à la réalité des sens (construction, toucher) et nécessitant de plus en plus de capacité d'abstraction.

Nous verrons comment la **recherche collective** est stimulante, et amène chacun par de multiples rebondissements à construire pas à pas **son propre système de pensée**.

Nous verrons enfin que l'erreur, en mathématique, n'est pas à sanctionner ni à rejeter, mais qu'elle est bel et bien enrichissante puisqu'elle permet de clarifier, d'argumenter, d'avancer.

Ce document se veut un témoignage en faveur de l'exaltante expérience qu'est celle d'accompagner des élèves dans une authentique recherche mathématique sur le chemin de la construction de leurs savoirs.

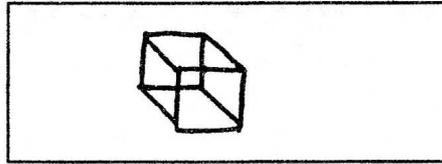
Environnement

Tout d'abord situons le contexte dans lequel s'est déroulée l'expérience relatée ici. Il s'agit d'une classe maternelle de milieu rural, comprenant petite, moyenne et grande section. Ce qui est décrit dans ces pages se passe avec un groupe d'une douzaine d'enfants de 4 ans 1/2 à 6 ans (Moyens et Grands).

(*) Ce dossier a été rédigé à l'occasion du concours de professeur d'école.

Genèse

Ce mardi donc, David prend la parole et déclare : *«Moi, je sais dessiner une boîte.»* Et il pose devant ses camarades une feuille de papier avec le dessin suivant :



Silence dans l'assemblée, chacun retient son souffle, instant magique où le temps est suspendu devant l'importance de l'événement. Qu'il reconnaisse comme un éclair dans ces quelques traits adroitement agencés «une BOITE», qu'un rideau s'ouvre petit à petit sur tout un horizon jusque là ignoré, ou que l'évocation n'ait pas lieu et que l'interrogation reste entière, chacun pressent la grandeur de la révélation qui vient d'être faite.

David, savourant l'admiration que lui voue son public, et lui-même encore subjugué par la joie de cette réussite, reprend simplement : *«C'est mon tonton qui me l'a appris»*, et s'avançant vers le tableau, explique, donne la clé :

- on fait un carré, et puis un autre carré qu'on accroche dedans
- et on ferme la boîte ! (en reliant les différents sommets)



Voilà : le «truc» est révélé !

Le temps reprend son cours, les respirations redeviennent régulières. Puis c'est l'effervescence, la ruche se met à bourdonner, chacun veut essayer et découvrir à son tour comment, à partir de ces deux carrés bien ordinaires cent fois vus et reconnus, agencés bien sûr de façon particulière (il fallait y penser !) la «boîte se ferme» par la magie de ces quelques traits obliques. Et chacun devine que cette découverte/réalisation ne s'arrêtera pas là, mais que l'on se trouve au seuil d'un autre monde, d'un nouvel univers. David d'ailleurs, s'y engouffre déjà et annonce : *«Je crois que je peux aussi dessiner une boîte-rectangle ; je vais y réfléchir.»*

Mais arrêtons-nous un moment sur ce qui vient de se passer.

Comment, tout d'abord, ne pas s'étonner devant l'inattendu de cette découverte dans une classe maternelle, où personne ne songera à «programmer» l'étude des volumes ou le dessin en perspective. Mais quelle belle occasion pour le pédagogue d'accompagner une authentique démarche mathématique.

Ne nous leurrions pas, elle ne va pour le moment pas bien loin, et relève plus du «truc» magique que de l'intégration d'une notion mathématique. Notons cependant qu'une porte s'est réellement ouverte dans «l'imaginaire» (la faculté de mettre en relation une représentation et une réalité) de ceux qui ont réussi à voir là une boîte.

La chose n'est pas aussi évidente qu'il y paraît et repérer dans ce fatras de traits une notion de profondeur exige une faculté d'abstraction certaine. Cependant, la technique dite «de l'écorché», familièrement utilisée par l'enfant de 3 - 7 ans dans ses représentations lui facilite peut-être la tâche.

Quelques jours après ... ou comment les découvertes des uns et des autres se répondent en écho.

Pendant le moment de l'accueil, Gaël me demande le rouleau de scotch : il a décidé de fabriquer un dé.

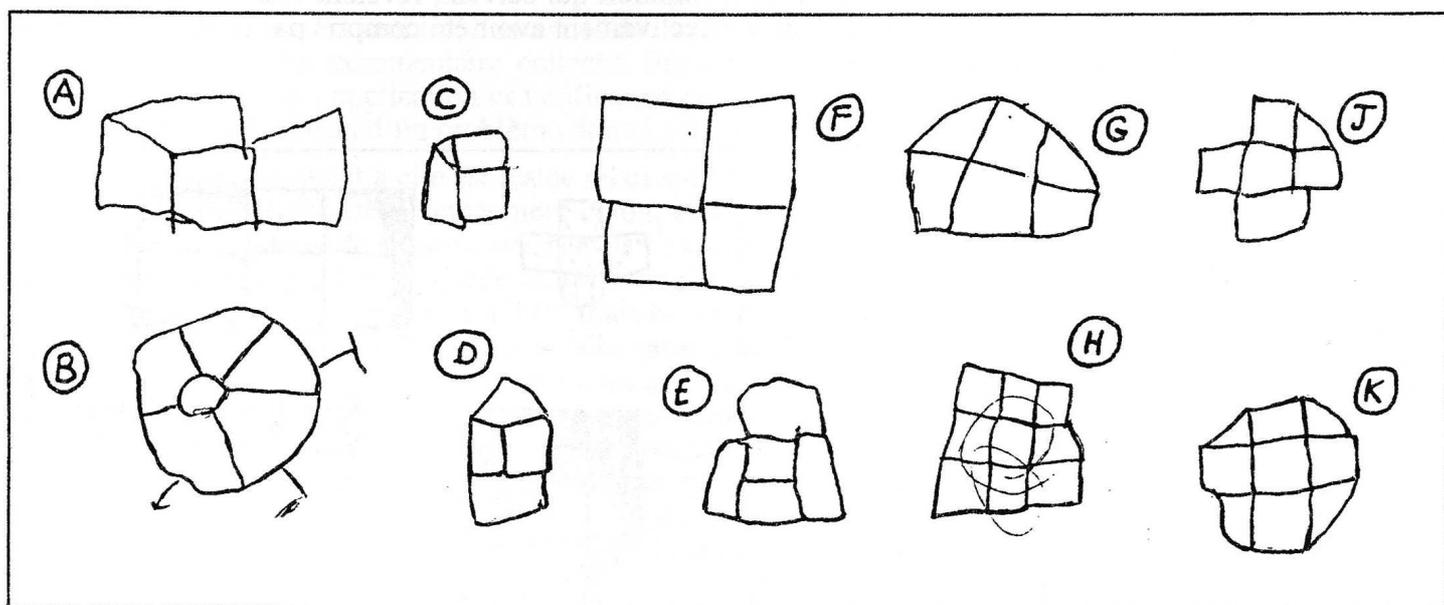
Et avec quelle adresse effectivement il confectionne un «cube», après avoir minutieusement découpé 6 carrés de papier sur lesquels il reproduit les six constellations et qu'il fixe patiemment de façon à obtenir un dé.

La présentation au groupe donne lieu à des commentaires (importance de l'égalité des carrés, possibilité de se servir d'un patron ou d'un pochoir...) et à des félicitations.

Deuxième rebondissement... ou comment les questionnements des uns interrogent les autres.

Samedi matin. Un enfant de grande section, absent pendant tous ces événements, revient à l'école et observe avec intérêt le dessin de David accroché au tableau.

Quelques jours plus tard, je lui suggère de s'essayer lui aussi à dessiner une boîte. Le dessin de David à ce moment-là ne se trouve plus au tableau et la mémoire de ce qu'il a vu ne suffit pas à le lui faire restituer. Aussi se lance-t-il dans une recherche par tâtonnement dont voici les différentes étapes :



N'ayant pas suivi pas à pas le tracé des différentes tentatives de façon à le laisser cheminer librement dans sa recherche, je ne saurais dire quelle en a été la progression.

Mais la figure nommée A a été la première de la série (pour la commodité du commentaire nous avons étiqueté arbitrairement toutes les figures). L'intuition était excellente, mais placé en face du cube, il n'a pas su comment représenter la deuxième face latérale qu'il a tenu à rendre visible.

Suivent une série de tentatives qui frappent par leur logique :

- tentative de saisir le cube par le dessus et de représenter les 5 (!) autres faces déployées tout autour (fig. B)
- tentative de le déployer en 2 bandes de 3 carrés (6 faces également) (fig. G)
- tentative presque réussie d'une vue de 3/4 avec découverte de la ligne de fuite oblique parallèle (fig. C)
- puis reprise de la figure corrigée avec ajout de la face du dessous (fig. D)
- autre essai semblant traduire l'observation, erronée, qu'une face est contiguë d'un côté à deux autres faces (fig. E)
- un essai avec 4 carrés disposés en carré (fig. F)
- l'intuition répétée d'une disposition en croix, d'abord «fermée» par des angles droits (fig. H) ce qui aboutit à 9 cases est ensuite fermement rejetée
- la même croix ensuite «fermée» par des traits obliques (fig. J, K)

C'est cette dernière que nous retiendrons pour poursuivre notre recherche.

Retour au groupe ou comment un nouveau défi est lancé

Quelques jours plus tard je soumetts au groupe l'éventail des recherches de Gilles. Les commentaires vont bon train. Gilles n'a pas abouti à la représentation proposée par David mais ses figures retiennent l'attention de ses camarades par leur aspect géométrique. Pour autant, aucun d'entre eux n'y voit, ou n'y exprime un rapport avec le développement du cube.

J'isole la figure K (ou J), en mettant en évidence la croix.

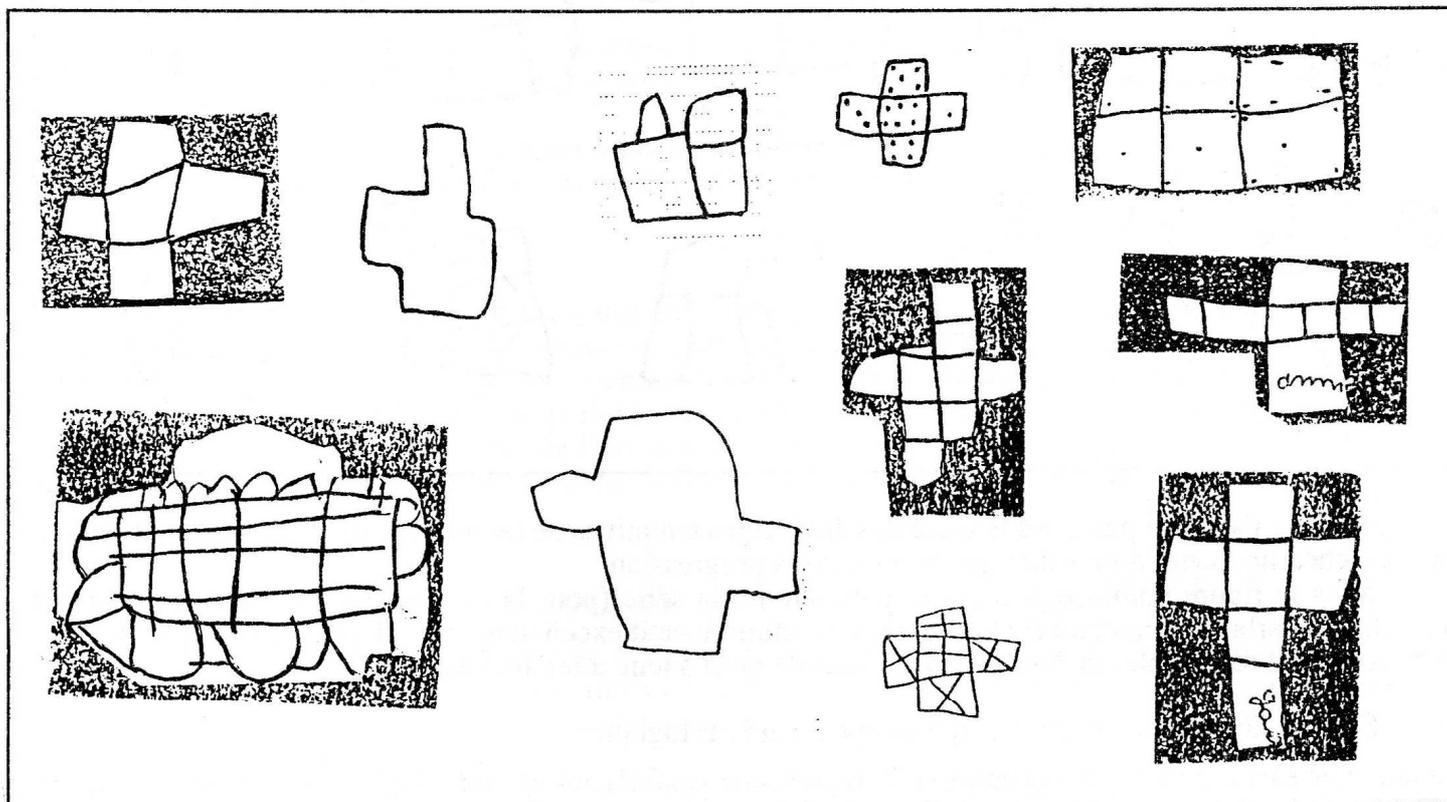
Si l'on découpe cette figure (je le fais devant eux), et que l'on rabat pour fermer les 4 faces latérales, comme Gilles semble le signifier avec les traits obliques, eh bien, on obtient effectivement, un cube (sans le dessous, ou le couvercle, comme le font remarquer les enfants).

Je rapproche alors cette construction du dé élaboré par Gaël en faisant remarquer qu'on avait obtenu là un cube presque sans trous, à partir d'une seule pièce de papier.

Puis je pose le problème suivant : **comment maintenant réaliser un cube «avec le couvercle» à partir d'une seule pièce de papier.**

Si l'activité fébrile, et le moment d'intense concentration qui suivent, révèlent une implication profonde dans le projet, si le problème que je pose semble effectivement avoir été compris par la plupart, les recherches s'orientent dans différentes directions.

En voici quelques exemples :



Nous distinguons plusieurs catégories de réponses :

> **priorité au contour** (forme du développement)

- avec tentatives réussies ou non de reproduire d'abord la croix
- avec une recherche dans le sens d'une augmentation de la surface de la valeur d'une case, mais sans trouver le lieu de l'extension.

> **priorité aux «cases»**

- travail de la symétrie sur un développement en croix avec recherche décorative et peut-être l'idée que celle-ci puisse servir la finalité mathématique (Laura, Céline)
- développement en croix avec cases irrégulières, incertitude sur le rapport entre rectangle et carré
- développement dissymétrique sans considération du nombre de faces (cf. 9 cases)
- mise en oeuvre des cases en tant que graphisme sans rapport avec les plis (quadrillage)
- présentation des 6 faces ponctuées à la façon du dé, mais sans possibilité d'assemblage (faces qui se superposent)
- développement en croix, cases numérotées de 1 à 5

Dans tous les cas de figures le raisonnement des enfants semble admettre l'un ou l'autre des deux principes suivants :

* le développement en croix permet la quasi-réalisation du cube, mais il y a lieu d'y opérer une transforma-

tion pour répondre à la consigne donnée

* la croix doit être conservée mais il faut l'augmenter d'une case et le problème se pose de savoir dans quelle direction.

Considérations pédagogiques et théoriques

Quelle a été dans toute cette démarche le rôle du maître ?

La description l'a montré, l'essentiel de l'activité a été fourni par les enfants eux-mêmes : apport de l'élément déclencheur, commentaire collectif, imitation, recherche personnelle dans différentes directions, émission d'hypothèses, application et vérification de la validité des hypothèses, questionnement les uns par les autres, compréhension d'un problème donné, formulation d'intuitions et de réponses.

La maîtresse quant à elle est restée relativement discrète, mais son comportement a été déterminant à des moments essentiels. Dès le lancement et tout au long de la démarche une attitude d'accueil, de valorisation, d'écoute attentive, de relance, ont permis l'expression des enfants, la certitude de l'intérêt de ce qu'ils apportaient, la confortation de l'idée qu'on avançait par essais et erreurs. L'erreur, en mathématique n'est pas sanctionnée, ni rejetée voire prohibée, mais bel et bien enrichissante pour tous puisqu'elle clarifie et permet d'avancer. À des moments-clés il a fallu saisir l'élément qui fait rebondir le problème, aiguiller la recherche dans une nouvelle direction, permettre la satisfaction des curiosités d'esprit qui se faisaient jour. Il a fallu mettre à disposition le matériel, encourager, équilibrer, en alternant la recherche personnelle et l'enrichissement du groupe. Bref, il s'est agi d'accompagner des apprentissages, bien plus que d'enseigner ou d'inculquer des concepts. Et c'est cette démarche qui a permis aux enfants d'affiner leurs perceptions, d'aiguiser leur sens de la recherche, d'approfondir leur maîtrise tout en respectant leur rythme d'acquisition et en laissant le temps faire son oeuvre dans le secret des maturations individuelles.

De multiples pistes auraient bien sûr encore pu être développées à partir de ce travail, qui elles-mêmes se seraient prêtées à de nombreuses recherches.

Mais voyons maintenant plus exactement quelles ont été, à travers ces activités, sinon les acquisitions du moins les ouvertures qui se sont produites dans les prises de conscience des enfants.

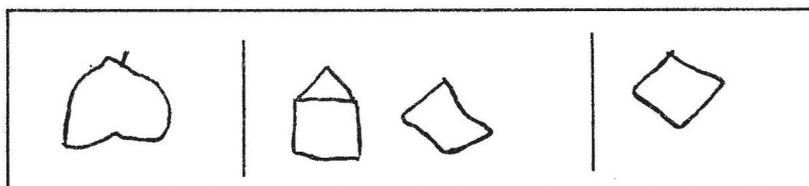
Distinguons tout d'abord deux choses : la perception et la reconnaissance d'une part, la représentation et la reproduction d'autre part.

La première, selon J. Piaget, s'organise très tôt, dès le courant de la première année. L'enfant est capable de reconnaître et d'organiser les rapports topologiques, projectifs et métriques. Ceux-ci s'acquièrent dans l'ordre cité :

- rapports topologiques : une ligne est ouverte ou fermée, une surface est pleine ou trouée...
- puis les rapports projectifs (alignement, parallélisme)
- et enfin les rapports de grandeurs, d'angles, de mesures

(cf. : «*La représentation de l'espace chez l'enfant*», J. Piaget)

Il n'en est pas de même pour la capacité de représentation, pour laquelle cet itinéraire doit être reconquis, et qui débute à l'avènement de la fonction symbolique (7-8 ans). Ainsi l'on verra que la représentation du parallélogramme observe les étapes suivantes :



(cf. : «*Manipuler, organiser, représenter. Prélude aux mathématiques*», Fr. Boule)

Les activités relatives illustrent effectivement les étapes de ces acquisitions : faculté ou non d'assimiler le dessin de David comme représentation du cube (acquise chez les plus grands, hésitante chez les Moyens), intérêt même chez les plus jeunes pour le développement du cube comme moyen pratique très ac-

cessible pour passer de l'espace à deux dimensions à celui à trois dimensions, recherche du développement correct tout en alignements chez tous les enfants.

Notons que le cube se prêtait particulièrement à ces manipulations, de par sa régularité et de par ses rapports angulaires, sachant que les lignes horizontales et verticales sont très tôt privilégiées.

Conclusion

Si savoir poser un problème ou une situation et le résoudre, est le propre de l'activité scientifique en général, le rôle de l'école maternelle est d'amener l'enfant à «mettre en oeuvre des stratégies de tâtonnement pour trouver des solutions aux problèmes qui lui sont posés et approcher ainsi des notions et outils nouveaux» (cf «Programmes de l'école primaire», 1995)

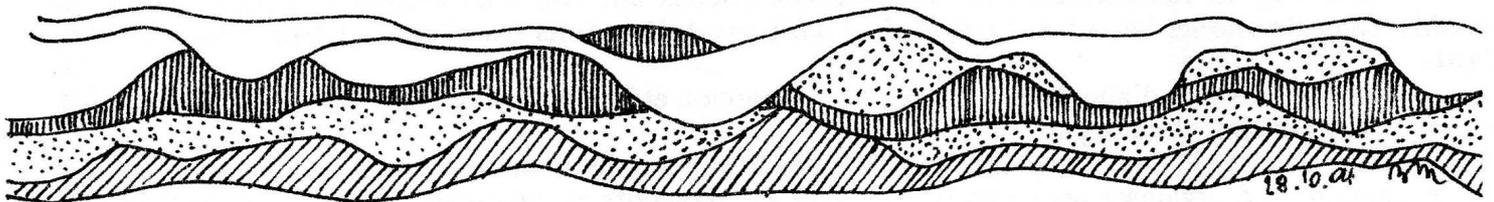
De même elle doit aider l'enfant à se situer et se repérer dans l'espace avant de situer et repérer des objets par rapport à soi ou d'autres objets.

Dans tous les domaines, elle doit susciter et développer des représentations qui petit à petit seront maîtrisées. Partant de l'imitation, de l'action, de l'immédiateté, la pensée de l'enfant doit s'en détacher peu à peu en créant de nouveaux supports qui s'organisent, se différencient, conduisent à la pensée abstraite. Ces représentations, d'abord inaccessibles et floues, pourront à force d'interrogations, de confrontations, prendre forme, se préciser.

C'est là que les interactions dans le groupe, sur la base de problèmes qui interrogent réellement, qui naissent de la rencontre effective avec le monde des objets et de leurs représentations, et non sur la base des questions fictives artificiellement amenées par l'adulte, c'est là que les interactions entre enfants jouent pleinement leur rôle.

C'est sur la base de ces tâtonnements, vécus seul, ou partagés collectivement, que se construit le mieux, l'esprit mathématiques.

Michèle COMTE



La logique jusqu'au bout du pied !

Sébastien, quatre ans, un peu flegmatique, a tendance à «utiliser» son frère Xavier, son aîné de deux ans, pour ses petits problèmes de la vie quotidienne.

Ainsi pour trouver «la bonne chaussure pour le bon pied» il avait l'habitude de poser une chaussure, n'importe laquelle, à côté d'un pied en s'adressant à son frère avec ces mots : «C'est le bon pied ?» Selon la réponse obtenue il mettait cette chaussure, ou enfilait l'autre. Ensuite il faisait la même opération avec la chaussure et le pied restants. Et ce petit manège se répétait chaque fois qu'il devait se chausser...

Un matin, Xavier venant de répondre à la première question rituelle pour «le bon pied», Sébastien s'apprêtait à lui poser la seconde pour l'autre pied. C'est alors que Xavier excédé explose : «Mais patate, t'as pas trois pattes, alors tu sais pas encore que si le premier est bon l'autre aussi ! - Ah bon... répond Sébastien, visiblement sans avoir compris les paroles de Xavier, j'savais pas...»

Anne-Marie MISLIN, novembre 2004