mathématiques

vers le théorème du rempailleur de chaises

histoire d'une recherche intéressante

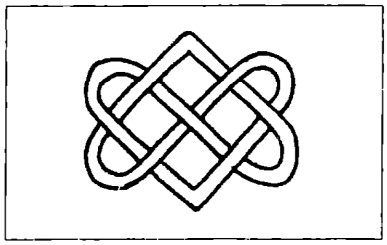
Michel Bonnetier:

Le lecteur, la lectrice de C.P.E. sera restée sur sa faim à la suite de l'article traitant des entrelacs tressés paru dans la livraison n°234 datée d'octobre 1993 (pages 11 à 14).

En voici le prolongement indirect.

Intéressés par les micro-machines (pour ceux qui ne connaissent pas: ce sont des voitures minuscules), qui ont leur place dans notre musée scolaire, mes élèves, l'année dernière au CE2, ont proposé de construire des maquettes pour ces véhicules. Nous avons d'abord réalisé ***un noeud autoroutier*** ordinaire, puis, à l'aide d'un livret de dessins géométriques, "les entrelacs"(*), nous avons construit la maquette de l'échangeur sud de Strasbourg.

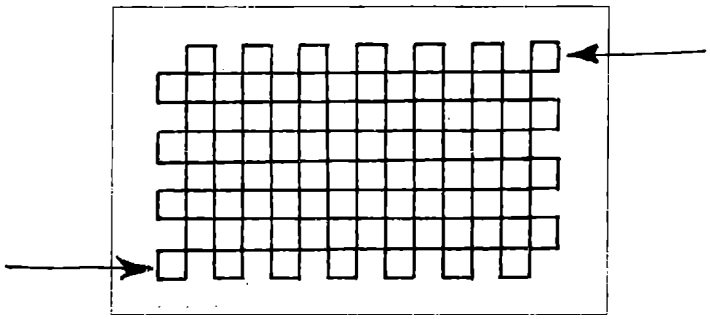
Ensuite nous nous sommes intéressés au ***"circuit sans fin"***:



Et nous avons bien joué.

Cette année, au cours moyen première année, plusieurs élèves se posèrent des questions sur ***les grillages*** qui entourent la cour de l'école. *"C'est comme des immenses circuits..."*

Plus tard, nous avions fabriqué ***des petits tapis*** en laine, à l'aide de cadres d'ardoises (ardoises cassées)) sur lesquelles nous avions plantés des clous. Nos tapis avaient la forme suivante (simplifiée):



Nous nous posions des questions quant à ces 2 petits carrés marqués, sur la représentation schématisée ci-dessus,d'une flèche. Nous n'arrivions pas à obtenir de tapis symétriques avec un carré aux quatre angles. Cela aurait été plus joli!

On proposa alors de voir ce que ça donnerait si, à la place des fils horizontaux et verticaux, on avait des fils "en diagonale", comme sur ***certaines chaises*** ... ou comme sur ***les grillages***.

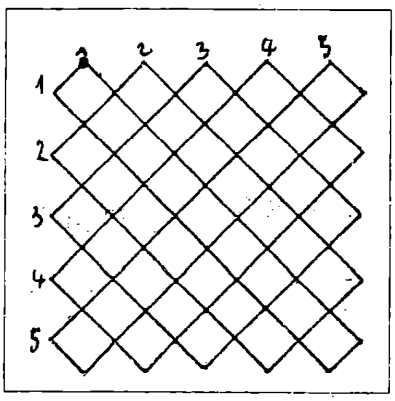
Avant d'essayer de fabriquer nos nouveaux cadres à tapis, nous nous sommes lancés dans des travaux de dessins sur feuille à petits carreaux de 5 sur 5 millimètres.

Nous tracions des "**tapis**" ou des "**paillages de chaises**" ou des "**grillages**" de forme carrée ou de forme rectangulaire.

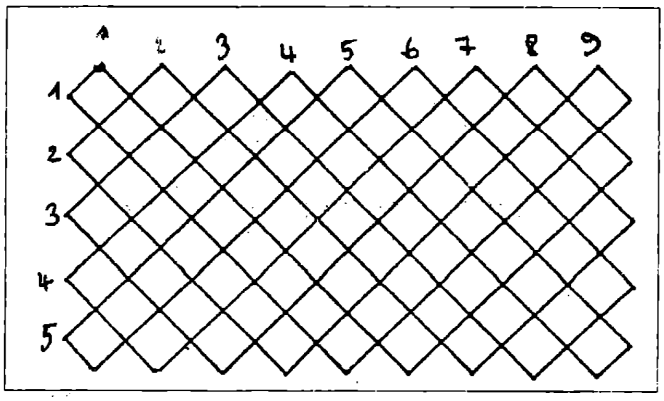
Nous donnions un "nom" à chaque dessin: par exemple (voir les deux dessins en haut de la page suivante) le "5/5" ou le "9/5".

... / ...

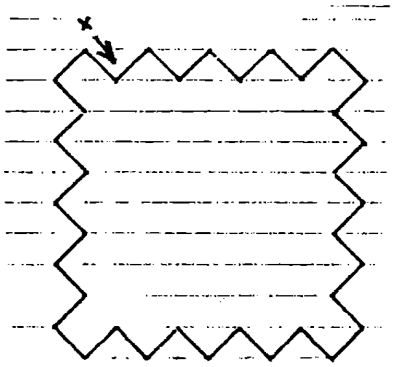
Voici un dessin de forme carrée que nous nommions "5/5".

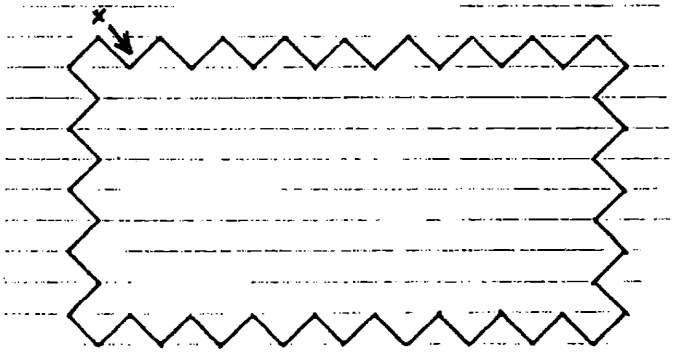


Ce dessin rectangulaire nous le nommions le "9/5". (9 sommets sur la longueur et 5 sommets sur la largeur)



Pour faciliter les tracés, nous procédions par crantage, puis tracions ensuite les diagonales.

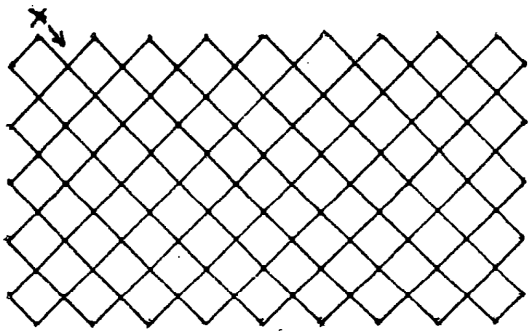




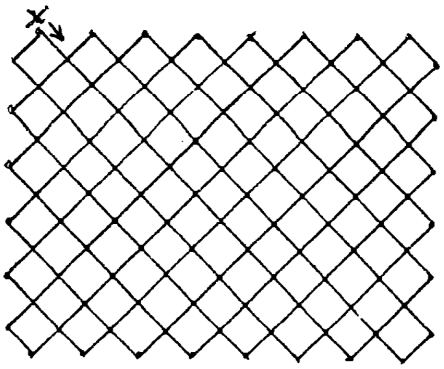
A l'aide de stylos- feutres de couleur, nous repassions sur les diagonales afin de savoir si l'on avait besoin d'un ou de plusieurs fils. Le point de départ étant le premier sommet à gauche (marqué " X") et le sens du tracé marqué par une flèche.
Constat:

pour de dessin "5/5", il faut 5 fils.
pour le dessin "9/5", il ne faut qu'un fil!

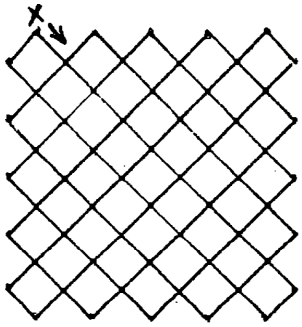
Avant de poursuivre plus avant,
nous invitons le lecteur, la lectrice, de se munir de feutres de couleur et de bien vouloir suivre le fil ou les fils des schémas 5/5, 9/5 et 6/8.



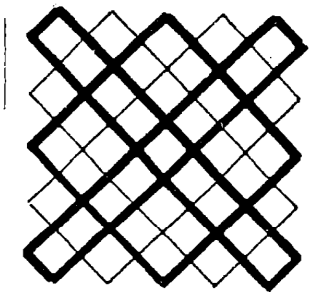
pour le schéma 9/5, il faut 1 fil



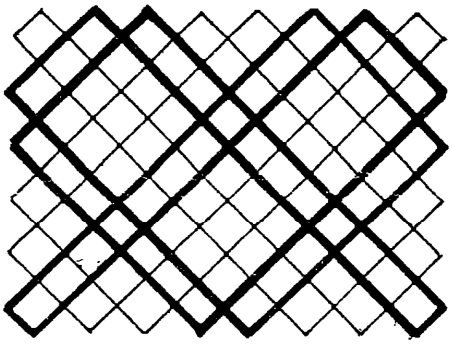
pour le schéma 6/8, il faut 2 fils



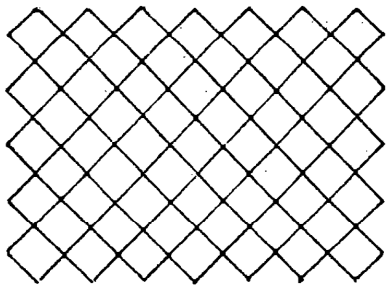
pour le schéma 5/5, il faut 5 fil



exemple de 5 fils



exemple de 2 fils



exemple de 1 fil

Forts de ce constat, nous substituant aux "rempailleurs de chaises", nous décidons d'en savoir plus.

Imaginant le rempailleur de chaises parlant à ses petits enfants:

Si le lecteur perd le fil... qu'il ne se décourage pas! (ou la lectrice...)

Nous nous sommes mis à simplifier le problème. Il ne fallait pas nous aventurer dans toutes les directions, mais essayer de travailler avec méthode.

Comment représenter tous les schémas possibles jusqu'au carré 10/10 ?

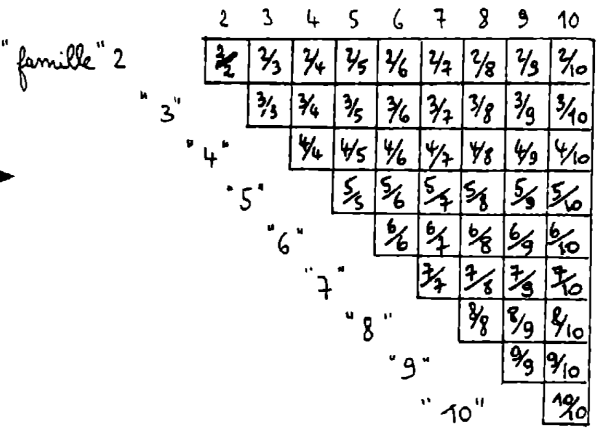
Nous avons rassemblé ces schémas dans des "***familles***".

Dans la famille "2", tous les schémas ont 2 pointes en largeur
Dans la famille "3", tous les schémas ont 3 pointes en largeur
Dans la famille "4", tous les schémas ont 4 pointes en largeur
etc...

Dans la **famille "2"**, on a donc les schémas:
2/2 2/3 2/4 2/5 2/6 2/7 2/8 2/9 2/10

Dans la **famille "3"**, il n'y a pas 3/2 (puisqu'il est déjà représenté dans la famille "2" à 2/3)
donc: 3/3 3/4 3/5 3/6 3/7 3/8 3/9 3/10
Dans la **famille "4"**
4/4 4/5 4/6 4/7 4/8 4/9 4/10
etc...

Chaque famille commence donc par un carré.
Nous avons trouvé les 45 schémas à représenter. (C'est un peu comme des tris de dominos.) ⟶



Toute la classe s'est lancée dans des tracés de carrés et de rectangles et ensuite dans les comptages de fils. Certains élèves disent des "chemins" (en souvenir de nos maquettes.)

Un groupe d'élèves habiles et rapides en tracés, s'est engagé à fond et a mené la recherche du début à la fin: Emilie, Jamila, Perrine, Jean-Christophe et Badr.
Voici leurs résultats:

Constats après les deux premières séries:

schémas: →
nombre de fils:

2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	2/7	2/8	2/9	2/10
2	1	2	1	2	1	2	1	2

schémas: ⟶
nombre de fils:

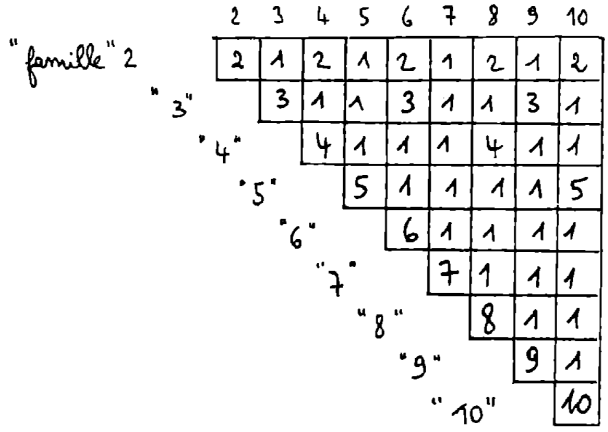
2/3	2/4	2/5	2/6	2/7	2/8	2/9	2/10
3	1	1	3	1	1	3	1

On devine un rapport avec les tables de multiplication

2 fils dans 2/ 2 , 2/4 , 2/6 , 2/8 , 2/10
3 fils dans 3/3 , 3/6 , 3/9
alors 4 fils dans 4/4 , 4/8 ?
et 5 fils dans 5/5 , 5/10 ?

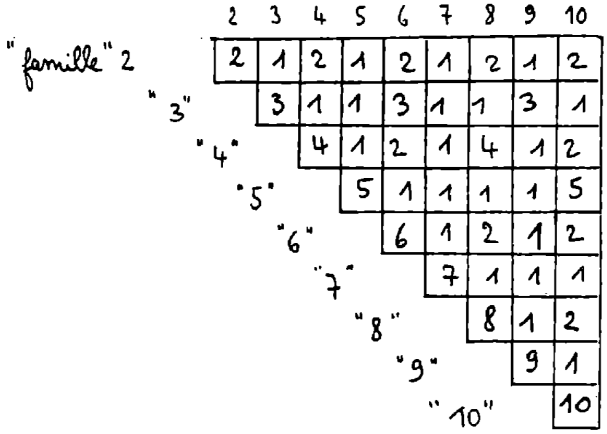
On vérifie avec la famille "4"
et l'on trouve:

4/4	4/5	4/6	4/7	4/8	4/9	4/10
4	1	2	1	4	1	2



On soupçonne des liens entre nombres pairs et tables de multiplication.

Alors on vérifie l'ensemble et on aboutit à:



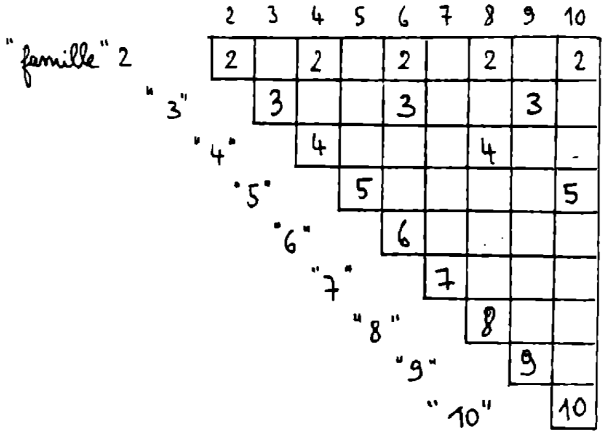
Et nous pouvons dire à "notre père", le rempaillleur de chaises:

1.
2.
3.

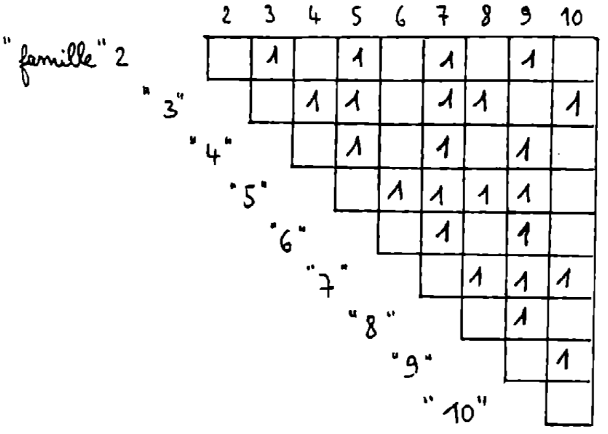
voir page suivante

Nous pouvons dire

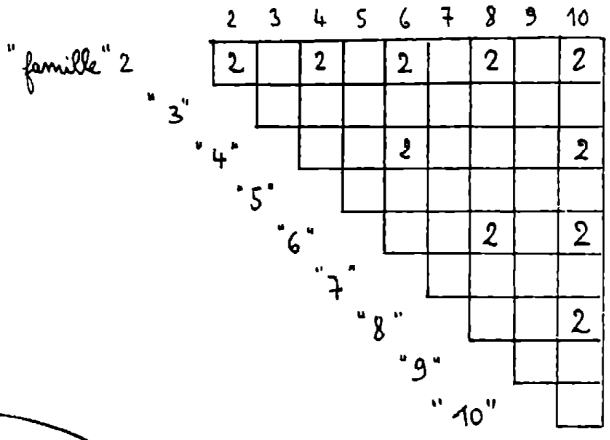
1/ C'est dans le système "CARRÉ" ou "RECTANGLE (RECTANGLE = 2, 3 ou 4 CARRÉS)" qu'il faut utiliser le plus de fils.

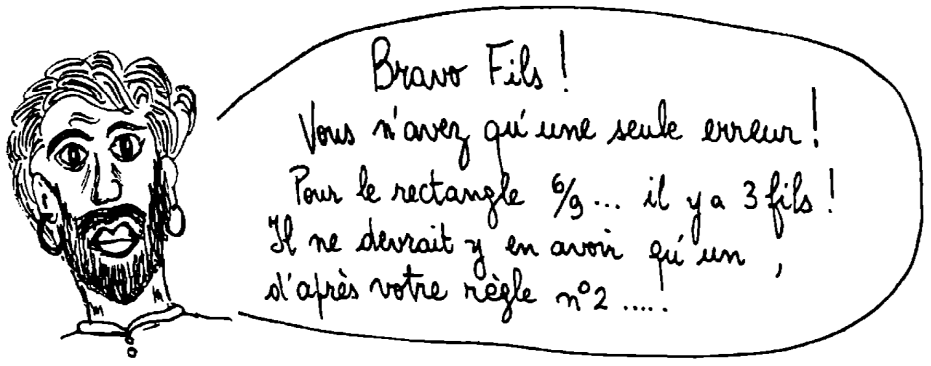


2/ Dans le système "RECTANGLE" il ne faut qu'un fil, une des deux mesures, L ou l, étant impaire.



3/ Dans le système "RECTANGLE" il faut deux fils, lorsque L et l sont paires.



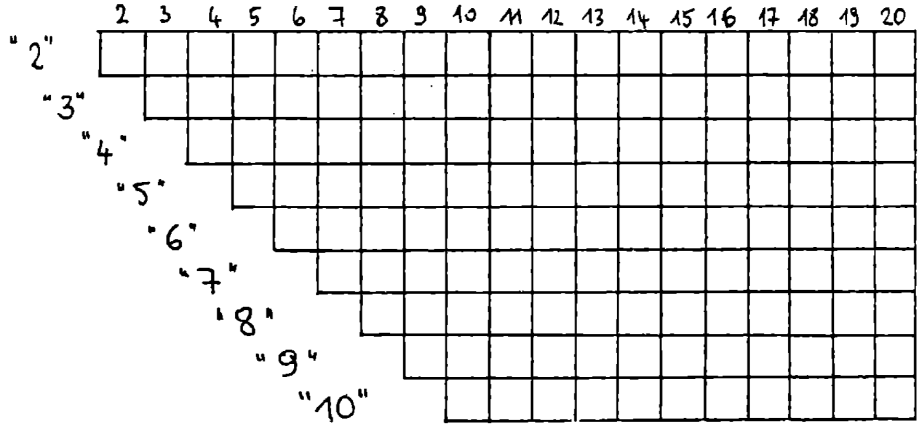


Nous mîmes le nez sur notre erreur.

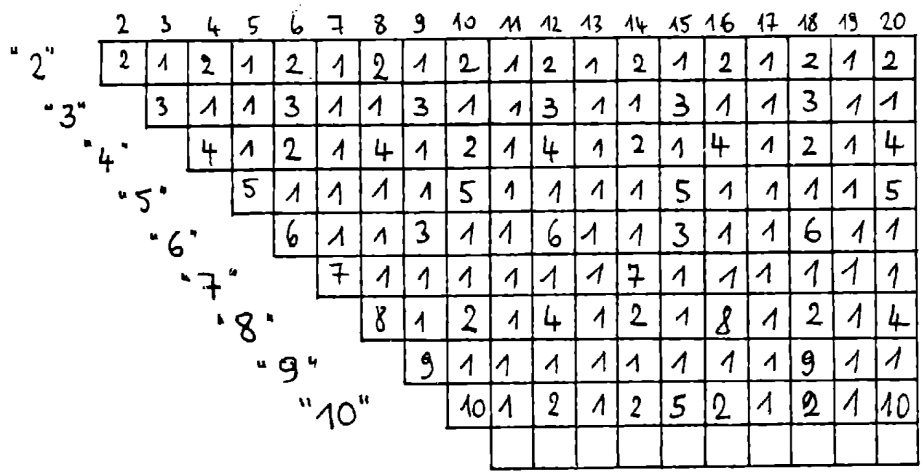
Par la suite, IL nous encouragea à élargir notre champ de recherches et nous travaillâmes dans le champ 10 à 20....

.../...

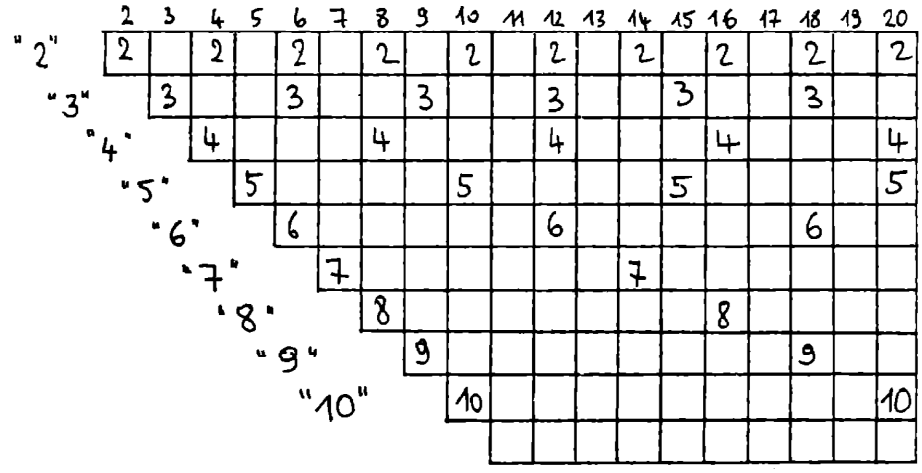
Nous travaillâmes dans le 10 à 20



et nous pûmes, grâce aux nombreux constats, établir le relevé suivant, confirmant nos découvertesénoncés précédemment:



Cependant nous voyons mieux apparaître les liens avec les tables de multiplication:

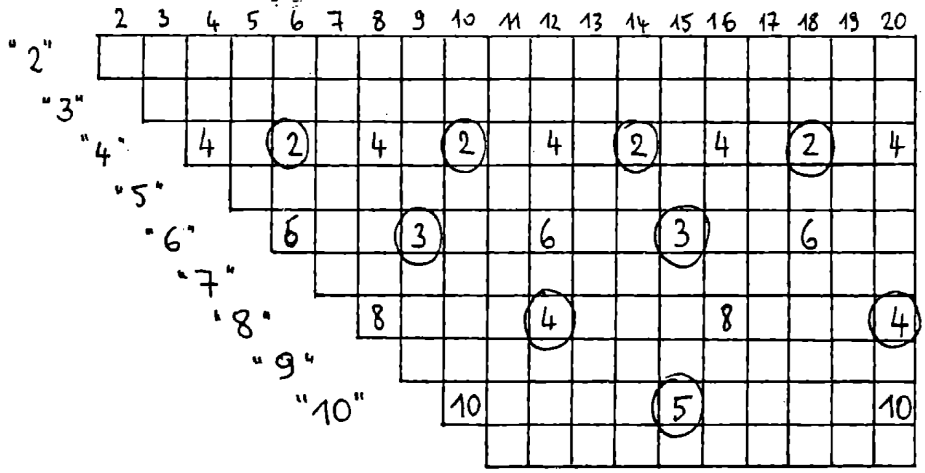


et surtout, nouvelle découverte!, les liens avec les "moitiés de tables" 4/6 , 6/9 , 8/12 , 10/15 etc ...

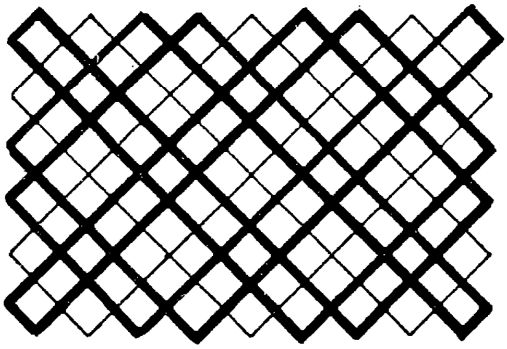
(voir tableau donné à la page suivante)

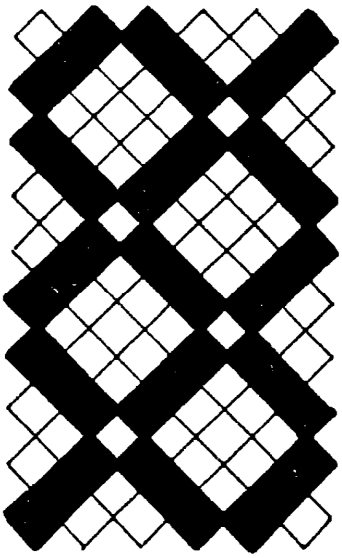
Encore au CM1, il nous a été difficile de transformer ces découvertes en théorème. Nous laissons cela aux spécialistes.
Notre recherche nous a suffi.
Et puis nous venons de découvrir de nouveaux espaces géométriques.

Nouvelle découverte: les liens avec les "moitiés de tables"

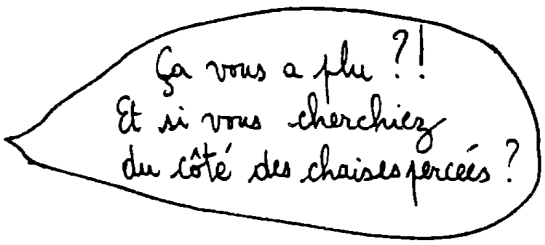


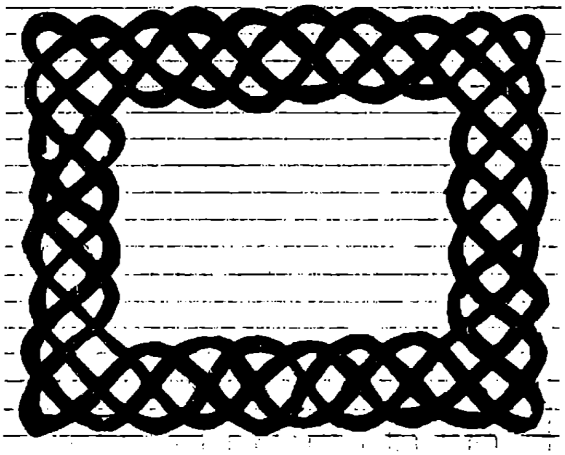
Et puis nous venons de découvrir
de nouveaux espaces géométriques:

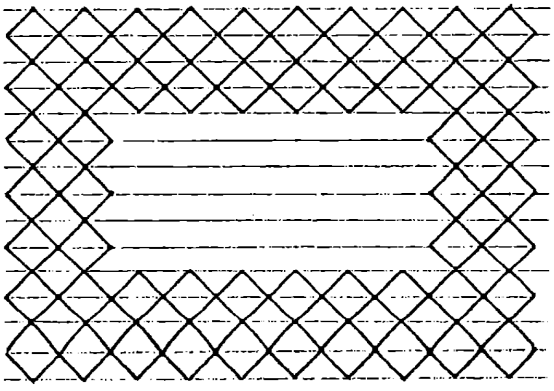




Alors:







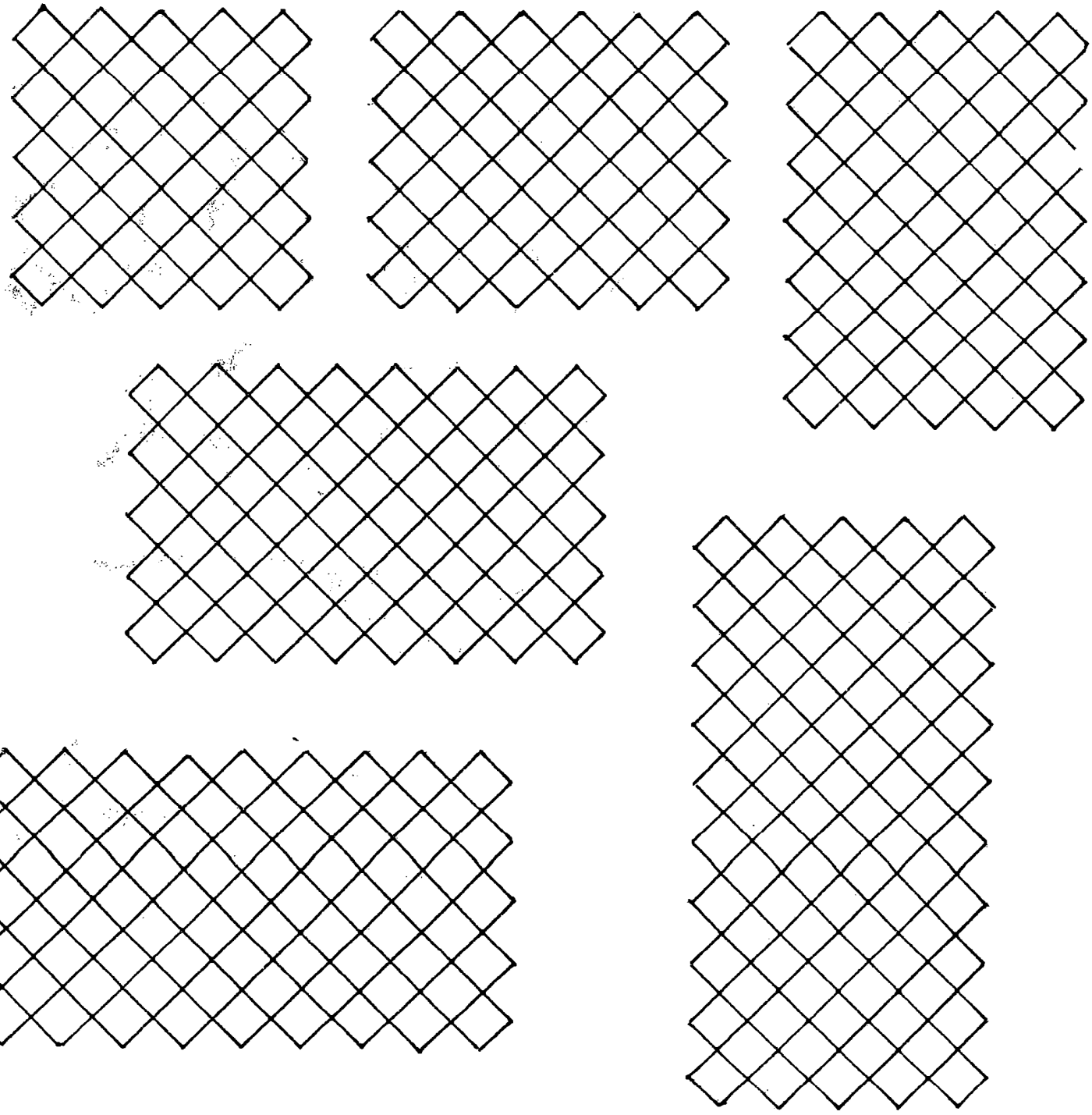
1 fil? 2 fils? 3, 4 fils?

De la chaise à la tresse celtique, il n'y a qu'un ... fil!

Michel BONNETIER,
Ecole Karine, Strasbourg, janvier 1995

page suivante:
quelques schémas pour vous inviter à commencer vos propres recherches ...

vers le théorème du rempailleur de chaises...

Michel Bonnetier:
"Le traçage de ces lignes en diagonales demande aux élèves beaucoup de temps. Aussi, pour ces nombreuses recherches sur le nombre de fils nécessaires, j'ai mis à leur disposition des photocopies des tracés. En voici une page, celle de la famille "5" (5 sommets sur la largeur)"

Et puis cette page est disponible pour que vous puissiez immédiatement entreprendre vos propres recherches ...