Gâteau d'anniversaire et tâtonnement expérimental

(ou Suites ... conjugales de l'exploitation d'un texte libre)

Betty : En manipulant , en tâtonnant , mes élèves et moi , nous n'avons trouvé que 6 combinaisons au problème du gâteau d'anniversaire rond et des 5 bougies . Connais-tu une formule donnant le nombre de combinaisons ?

Robert : Au cours de nos réunions , nous avons travaillé sur de nombreux problèmes de combinatoire , nous avons abouti à une formule que nous pourrions appeler formule générale et qui , pour 5 bougies , chacune d'une couleur différente , donnerait $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ combinaisons , mais elle ne s'applique pas à ton problème .
Nous avons aussi trouvé , lors du problème sur les chewing-gum (voir dossier nº 15 de juin 1970) une formule qui donnerait
$\frac{5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 126$ combinaisons , mais elle ne s'applique pas non plus à ton problème .

Betty : Ce qui m'intéresse présentement , c'est une formule pour mon problème. Nous n'avons trouvé que 6 combinaisons , les avons-nous trouvées toutes , voilà la question précise que je te pose .

Robert : Eh bien ! cherchons . Prenons d'abord les cas avec des bougies chacune d'une couleur différente .
Avec 1 seule bougie , il n'y a qu'une seule combinaison .
Avec 2 bougies , il n'y a aussi qu'une seule combinaison , car la deuxième combinaison , par rotation d'un demi-tour , redonne la première .
Avec 3 bougies (et les rotations de 1/3 de tour) nous trouvons 2 combinaisons .
Avec 4 bougies (et les rotations de 1/4 de tour) nous trouvons 6 combinaisons .
Résumons sous forme de tableau ce que nous avons trouvé :

bougies	combinaisons
1	1
2	1
3	2
4	6
5	x

Observons ce tableau . Pouvons-nous en tirer une formule ?

Betty : Oui . Et si la formule est juste , pour 5 bougies différentes , nous avons 4 x 6 = 24 combinaisons , mais avec 5 bougies différentes , ce qui n'est pas le cas de mon problème où Armand a dit qu'il y avait 2 bougies blanches , 2 bougies roses et 1 bougie verte . D'autre part la formule donne le nombre de combinaisons mais pas les combinaisons. Comment déjà trouver les 24 combinaisons ?

Robert : Un moyen , c'est de construire l'arbre qui pour 5 bougies différentes donne I20 combinaisons et d'éliminer celles qui par rotation sont identiques . Pour plus de commodité attribuons un chiffre à chaque couleur : I - 2 - 3 - 4 - 5 .
Par ce moyen , que tu trouves long , d'accord , nous obtenons 24 combinaisons ainsi codées :

I 2 3 4 5	I 3 2 4 5	I 4 2 3 5
I 2 3 5 4	I 3 2 5 4	I 4 2 5 3
I 2 4 3 5	I 3 4 2 5	I 4 3 2 5
I 2 4 5 3	I 3 4 5 2	I 4 3 5 2
2 I 3 4 5	2 3 I 5 4	2 4 I 3 5
2 I 4 3 5	2 3 4 I 5	2 4 I 5 3
2 I 4 5 3		2 4 3 I 5
3 I 2 5 4	3 2 I 5 4	3 4 I 2 5
		3 4 2 I 5

Betty : Et mes 6 combinaisons ?

Robert : Nous y arrivons . Puisque tu avais 2 bougies blanches , 2 bougies roses et 1 bougie verte et que nous avons attribué 1 chiffre à chaque couleur disons que 1 = 2 et 3 = 4 et dans les 24 combinaisons ci-dessus remplaçons 2 par 1 et 4 par 3 . Nous obtenons :

I I 3 3 5	I 3 I 3 5	I 3 I 3 5
I I 3 5 3	I 3 I 5 3	I 3 I 5 3
I I 3 3 5	I 3 3 I 5	I 3 3 I 5
I I 3 5 3	I 3 3 5 I	I 3 3 5 I
I I 3 5 3	I 3 I 5 3	I 3 I 3 5
I I 3 3 5	I 3 3 I 5	I 3 I 5 3
I I 3 5 3		I 3 3 I 5
3 I I 5 3	3 I I 5 3	3 3 I I 5
		3 3 I I 5

Betty : Ah oui ! maintenant je vois des combinaisons identiques , mais il nous reste 8 combinaisons :

I I 3 3 5	I 3 I 3 5	3 I I 5 3
I I 3 5 3	I 3 I 5 3	3 3 I I 5
	I 3 3 I 5	
	I 3 3 5 I	

Robert : D'accord , mais II335 et I335I sont identiques , vérifie par rotation , ainsi que 3II53 et 33II5 . En conclusion , il reste 6 combinaisons :

I I 3 3 5	I 3 I 3 5	3 I I 5 3
I I 3 5 3	I 3 I 5 3	
	I 3 3 I 5	

Remplace 1 par bougie blanche , 3 par bougie rose , 5 par bougie verte et tu retrouves les 6 combinaisons de tes élèves .

Betty : Mes élèves sont allés plus vite que toi .

Robert : C'est bien , mais étiez-vous sûrs qu'il n'y avait que 6 combinaisons ?

Betty : C'est pourquoi je t'ai posé la question .
Et si les bougies sont en ligne sur un cake ?

Robert : Reprenons les I20 combinaisons codées avec I , 2 , 3 , 4 , 5 et éliminons les combinaisons " nombres égaux " .
Il reste les combinaisons suivantes :

I I 3 3 5	I 3 I 3 5	I 5 I 3 3
I I 3 5 3	I 3 I 5 3	I 5 3 I 3
I I 5 3 3	I 3 3 I 5	I 5 3 3 I
	I 3 3 5 I	
	I 3 5 I 3	
	I 3 5 3 I	

3 I I 3 5	3 3 I I 5	3 5 I I 3	5 I I 3 3	5 3 I I 3
3 I I 5 3	3 3 I 5 I	3 5 I 3 I	5 I 3 I 3	5 3 I 3 I
3 I 3 I 5	3 3 5 I I	3 5 3 I I	5 I 3 3 I	5 3 3 I I
3 I 3 5 I				
3 I 5 I 3				
3 I 5 3 I				

qui par rotation d'un 1/2 tour ne laissent subsister que I6 cas :

I I 3 3 5	I 3 I 3 5	I 5 I 3 3	3 I I 3 5	3 3 I I 5
I I 3 5 3	I 3 I 5 3	I 5 3 I 3	3 I I 5 3	
I I 5 3 3	I 3 3 I 5		3 I 3 I 5	
	I 3 3 5 I		3 I 5 I 3	
	I 3 5 I 3			
	I 3 5 3 I			

Il suffit de décoder en sachant que 1 = bougie blanche ,
3 = bougie rose ,
5 = bougie verte .

Voilà comment des élèves du C.M. auraient pu conduire leurs recherches pour arriver à la solution . Ils auraient pu aussi observer les combinaisons retenues afin de découvrir un système de recherche plus rapide .

Betty : Et la formule ?

Robert : Demandons-la aux camarades de la commission math , à leur tour de chercher .

Betty : Il y a peut-être des erreurs dans ton raisonnement .

Robert : C'est possible . Il est peut-être faux . A toi d'exercer ton esprit critique comme doit le faire tout maître école moderne .

Betty : Mais cela a demandé beaucoup de temps . Et combien de fois au cours de réunions non I.D.E.M. n'a-t-on pas reproché cette soi-disante perte de temps .

Robert : Perte de temps ! Oh ! que non . Nous espérons que nos élèves , habitués aux joies de la recherche , ne seront plus des élèves passifs qui appliquent mécaniquement des règles , mais qu'ils réfléchiront devant des situations nouvelles , mathématiques ou pas .

Betty : Mais certains de nos collègues se plaignent du manque d'information.

Robert : Est-ce une excuse , est-ce un prétexte , là n'est pas la question , car je considère que la réforme mathématique est difficile non par manque d'information (les connaissances mathématiques nécessaires dans l'enseignement élémentaire , tout enseignant peut les acquérir facilement) mais par manque de formation .
C'est une question d'individu , de personnalité plus que de matière.
Comme le dit Diénès :
" Il est impossible d'enseigner les mathématiques modernes de manière dogmatique , le professeur lui aussi doit réapprendre la démocratie "

Le danger c'est de voir " enseigner " les mathématiques " modernes " sans changer l'esprit de l'enseignement .

Betty : Je suis d'accord avec toi , mais cet esprit ne s'apprend pas dans les livres . . .

Robert : . . . mais par le travail en équipe . C'est ce que je répète constamment aux camarades : créez des petits groupes de travail où chacun se sent au même niveau que son équipier et où chacun peut s'exprimer librement . Dans ces groupes de travail , évitez les bavardages théoriques , mais travaillez à même les cas vécus dans vos classes , sur vos documents .
Surtout ne croyez pas qu'il faut un leader , celui que l'on écoute parce qu'il a (en principe) " beaucoup " d'expérience , parce que ... (complétez vous-mêmes) .
Eh ! bien , non . Le leader ne sera pas sur votre longueur d'onde et les inconvénients l'emporteront sur les avantages .
Par contre , il serait intéressant que chaque petit groupe de travail envoie un délégué aux réunions math 2 e niveau , ces délégués effectuant une liaison qui serait bénéfique POUR TOUS .
Peut-être aussi un bulletin interne serait-il un excellent outil de travail et de liaison , ce bulletin contenant sans soucis de la forme , en toute simplicité et camaraderie , comptes-rendus de recherches , questions , réponses , etc . Si ce bulletin répond à un besoin , il verra le jour , si non ...
Peut-être aussi un (ou des) circuit bande magnétique circulant entre les divers groupes de travail rendrait-il service . Un groupe de travail exposerait par exemple une difficulté rencontrée , d'autres groupes donneraient leur point de vue et le groupe de départ recevrait la bande enrichie .
Ce ne sont que des propositions tendant à établir une liaison nécessaire entre les divers groupes math et ceci dans l'intérêt de tous .
Vous avez la parole et surtout agissez .

Betty et Robert DANIEL
Ecole Freinet
WITTENHEIM

Post-scriptum : voir page suivante

Post-scriptum : Nous voyant Betty et moi plongés dans nos recherches , notre fille Claudette (élève de 4 e) , intéressée , s'est mise à chercher . Au bout de 10 mn elle nous dit : " J'ai trouvé 16 combinaisons . "

Voici le résultat de ses recherches bien plus rapides que celles de ses parents . Remarquez que Claudette a choisi un autre code :

I = bougie verte
2 = bougie blanche
3 = bougie rouge

I 2 2 3 3	2 2 I 3 3	~~2-3-2-3-I~~	~~3-3-I-2-2~~	~~3-2-I-3-2~~
I 3 3 2 2	~~2-2-3-3-I~~	2 3 I 2 3	~~3-3-2-2-I~~	~~3-2-I-3-2~~
I 2 3 2 3	2 2 3 I 3	2 3 2 I 3	~~3-3-2-I-2~~	~~3-2-3-I-2~~
I 3 2 3 2	2 3 3 I 2	~~2-I-3-3-2~~	3 2 2 I 3	~~3-I-2-2-3~~
I 3 2 2 3	~~2-3-3-2-I~~	2 I 2 3 3	~~3-2-2-3-I~~	~~3-I-3-2-2~~
I 2 3 3 2	2 3 I 3 2	2 I 3 2 3	3 2 I 2 3	~~3-I-2-3-2~~
			~~3-2-3-2-I~~	

Est-ce exact ? Avez-vous deviné son système ?

R.Daniel

LES GRANDS NOMBRES

Un camarade qui a lu le compte-rendu publié dans le bulletin n°24 sous le titre "le jeu d'échecs",un sur les trois qui ont réagi alors que j'espérais bien plus de réactions,m'a signalé des erreurs en ce qui concerne la lecture des grands nombres.

Depuis I948 (conférence des poids et mesures):

le nom BILLION n'est plus synonyme de milliard,mais vaut un million de millions : IO^{12}

Le TRILLION vaut un million de billions soit IO^{I8}

Il existe aussi des QUADRILLIONS (IO^{24}) et des QUINTILLIONS (IO^{30})

Cette information vous permettra de lire,à l'avenir des nombres comme:

III 222 333 444 555 666 777 888 999 000 I23 456 !!!

D.D.