NUMÉRATION

AUTOUR DU CONCEPT NUMÉRATION

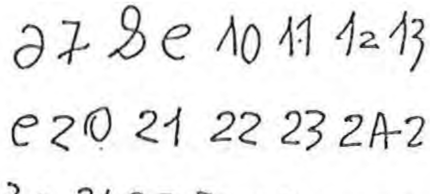
Dire que la numération est un concept-clé de la mathématique est un truisme. Se pencher de nouveau sur un tel thème peut paraître inutile. Notre postulat de base est qu'une non-conceptualisation de la notion de nombre empêche un individu d'accéder à la mathématique abstraite, ce qui en soi n'est que peu gênant dans la vie quotidienne, mais aussi limite le développement du rationnel et du logique dans notre pensée.

Lorsque nous étudions les critères de sélection, dans notre système scolaire, nous constatons que la mathématique en constitue la dominante fondamentale : quelles qu'en soient les raisons (économiques, idéologiques...) et l'opinion que nous en avons, c'est un fait que nous ne pouvons ignorer. L'échec en mathématique est donc une limitation des possibilités professionnelles de chacun et modifie par là-même, l'épanouissement global de l'individu.

Une récente étude menée par l'université d'Adélaïde (Australie) (1) nous renseigne sur deux phénomènes :

1) Il existe une corrélation entre les résultats en mathématique abstraite (tout ce qui touche à la notion de nombre) et les résultats en philosophie. Ceci n'est pas pour nous surprendre ; en effet, les réflexions de quelques philosophes qui se sont penchés sur le sujet évoquent cette relation. Kant (2) met en parallèle les deux formes de connaissances rationnelles : philosophique et mathématique. *La connaissance philosophique est la connaissance rationnelle par concepts, et la connaissance mathématique la connaissance rationnelle par construction de concepts (...) La connaissance philosophique considère le particulier uniquement dans le général et la connaissance mathématique le général dans le particulier, même dans le singulier, mais a priori et au moyen de la raison.*

Auguste Comte (3) écrivait : *Quant à la mathématique abstraite, sa nature est*



nettement et exactement déterminée. Elle se compose de ce qu'on appelle le calcul en prenant ce mot dans sa plus grande extension, qui embrasse depuis les opérations numériques les plus simples jusqu'aux plus sublimes combinaisons de l'analyse transcendante. Le calcul a pour objet propre de résoudre toutes les questions de nombre (...). L'analyse mathématique est la véritable base rationnelle du système entier de nos connaissances positives ; elle s'apparente directement à l'analyse philosophique.

Nous pourrions citer Descartes (4), voire Dienes dans plusieurs passages de *Construction des mathématiques.* Cela nous semble inutile puisque ce sujet n'est pas l'essentiel de notre propos.

2) La seconde constatation nous apparaît plus fondamentale et nous interpelle en tant que pédagogue. Il y a corrélation entre un apprentissage forcé de la numération à un âge précoce et l'échec à l'examen de fin de cycle général (niveau 3ᵉ collège). On constate un échec deux fois supérieur.

Pour que de telles constatations soient reconnues scientifiquement, de multiples expériences seraient nécessaires, sur de très longues périodes. Pourtant, c'est une réalité relevée par de nombreux chercheurs en mathématique. *L'apprentissage artificiel de la mathématique et particulièrement des schémas numériques, tel qu'il est pratiqué actuellement dans notre enseignement, comporte un taux d'échec très important : il y a manque de compréhension des structures mathématiques,* écrit Dienes (5).

Le même chercheur cite les travaux de l'U.I.C.S.M. : *Certains membres de l'U.I.C.S.M. (University of Illinois Committee on School Mathématique) ont récemment souligné le rôle des démarches non verbales dans la découverte mathématique et les dangers d'une verbalisation prématurée* (6).

Ce problème d'une verbalisation précoce, alors que le sens et la fonction des symboles ne sont pas acquis, ne peut être ignoré par les enseignants. Quels peuvent être les moyens de le résoudre ?

A ce stade, il nous semble nécessaire de rappeler ce qu'est un nombre. Un nombre est la propriété commune à un ensemble d'ensembles ; coder un nombre, c'est définir un système de numération afin de le reproduire par son signe. Cela suppose une faculté de symbolisation. La fonction symbolique permet de représenter des objets, des événements non perceptibles sur le moment, en les évoquant à l'aide de signifiants que l'on appelle symbole ou signe.

— **Le symbole** : c'est un signifiant qui est directement évocateur d'un signifié pour tous les individus.

— **Le signe** : c'est un signifiant conventionnel qui ne peut être compris que par les individus initiés au code, à la convention. Exemple : le mot écrit (7).

Avant d'accéder au signe supérieur que représente le nombre en mathématique, l'enfant va progressivement manipuler des symboles-clés de l'acquisition mathématique d'un individu. *Si on constate, généralement, une sclérose prématurée de la pensée mathématique chez les enfants, la cause en est probablement l'emploi inconsidéré des symboles, c'est-à-dire l'introduction et la manipulation du symbolisme avant que l'enfant ait pu acquérir une expérience appropriée de ce que l'on veut symboliser (8).* Arrivés à ce moment de notre analyse et quelle que soit notre opinion à son sujet, nous ne pouvons pas ne pas citer Piaget. Piaget définit l'intelligence comme *une adaptation à des situations nouvelles.* Elle n'est ni donnée d'une manière innée, ni le simple résultat d'un environnement naturel ou socioculturel ; mais l'enfant la construit à partir des actions par lesquelles il modifie son environnement, grâce à leur intériorisation progressive.

Un second principe indique que la genèse de l'intelligence s'effectue selon des « stades » caractéristiques dont les limites temporelles varient avec les individus et les cultures, mais dont l'ordre de succession est constant. Le résultat final atteint étant l'équilibre des opérations (actions intériorisées) de la pensée.

A propos de la notion de nombre, Piaget montre que, pour être vraiment compris, le nombre exige une synthèse spécifique effectuée à partir des groupements qui fondent la sériation et la classification :

- Le nombre retient les structures d'inclusion des classes (1 inclus dans 2 ; 2 inclus dans 3, etc.).
- Comme il fait abstraction des qualités des objets pour ne pas les considérer autrement que comme des unités, il fait aussi intervenir un ordre (sériation ou rangement) afin qu'il soit possible de distinguer une unité de la suivante (1 puis 1 puis 1, puis 1, etc.).

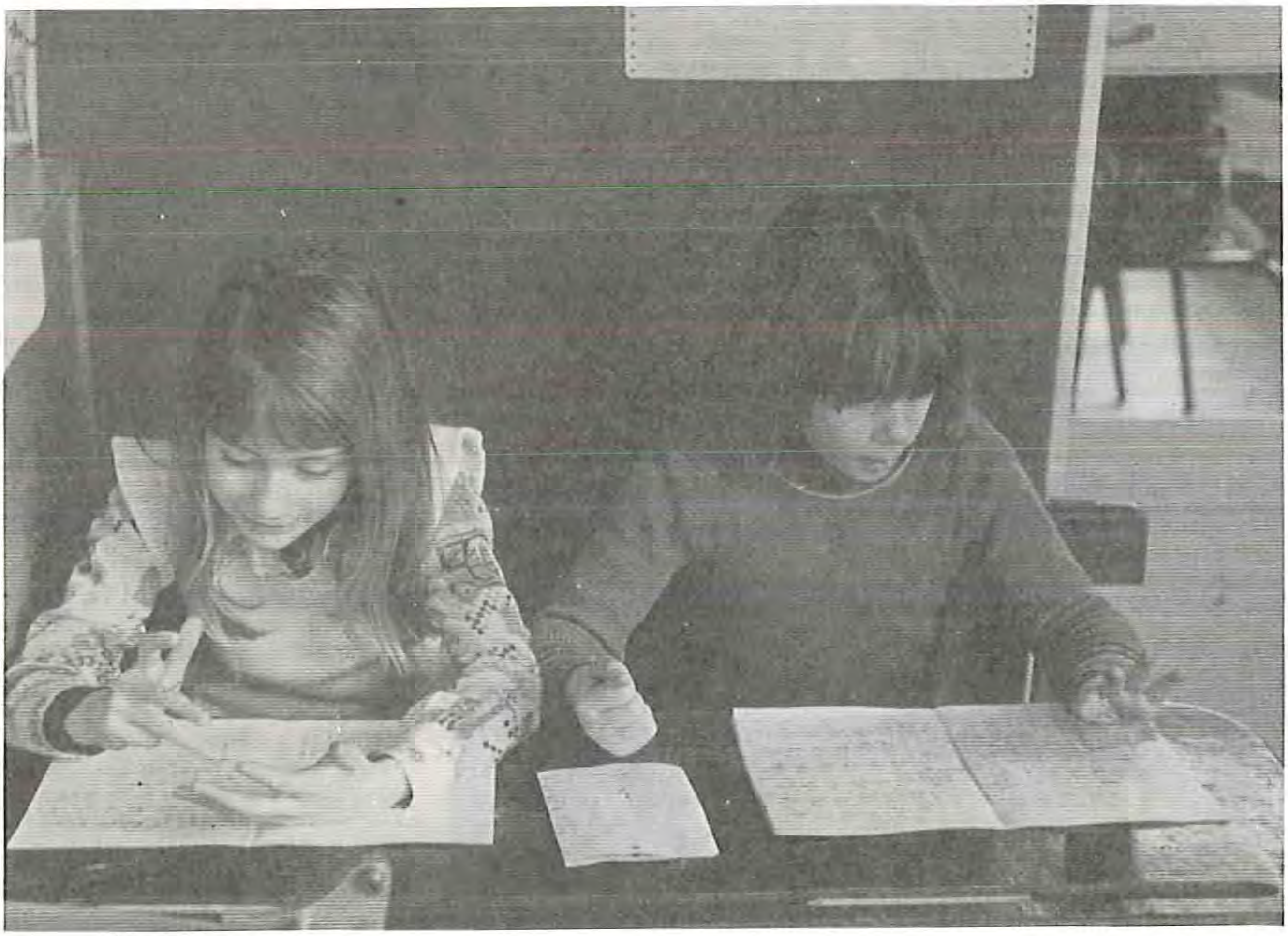
En disant que le nombre est la synthèse de l'inclusion et des relations d'ordre, nous résumons simplement ce que chaque axiomisation est obligée de dire sous une forme ou sous une autre (9). Piaget fixe cette acquisition au stade des opérations concrètes (7-8 ans) après l'acquisition de la fonction symbolique située dans le stade immédiatement précédent.

Vous connaissez certainement, sinon vous imaginerez sans peine, les « dégâts » occasionnés par des parents bien intentionnés qui, pour faire progresser leurs enfants plus rapidement (du moins le croient-ils...) leur apprennent une litanie : 1 un, 2 deux, 3 trois... dans le système décimal, sans que l'enfant ait acquis son sens.

Comment s'effectue le passage de la symbolisation ? Scientifiquement, aucune théorie n'est capable de nous l'expliquer. Nous connaissons simplement quelques renseignements. L'acquisition s'effectue rarement de manière linéaire : elle ne suit pas une logique ordonnée et dépend des conditions de réception de chaque enfant. Dienes écrit : *Le processus d'acquisition est un processus psychologique et non pas un processus logique ; une séquence logique bien ordonnée ne constitue pas nécessairement la meilleure méthode pour apprendre une structure abstraite* (10). *La compréhension des structures et le processus de symbolisation ne sont pas des activités entièrement distinctes et, en fait, chacune agit sur l'autre comme un stimulant* (11).

Un certain nombre de pistes nous sont offertes afin de faciliter le passage à la symbolisation puis au nombre. Bassis (12) qui a longtemps travaillé avec des adultes au sujet de la numération, a constaté que les constituants conceptuels de cette notion étaient connus comme règles à savoir et non comme issus de nécessités internes (nécessités de l'ordre de l'action comme le fait d'avoir à grouper, de l'ordre de la communication sociale comme se donner une convention commune...). La numération est souvent présentée comme un principe à connaître ainsi que son maniement technique. Il s'agit là, dans le meilleur des cas, d'une appropriation et non d'une construction effectuée par les enfants eux-mêmes. Dienes écrit encore *Les concepts abstraits doivent être formés par les enfants eux-mêmes à partir d'un grand nombre de situations concrètes* (13). Il n'est pas le seul à penser l'acquisition de la mathématique dans ce sens : *Le passage à la symbolisation n'est scientifiquement pas expliqué ; il reste une entité à part avec une seule certitude : le jeu mathématique favorise l'élaboration de la symbolisation* (14).

Un certain nombre d'expériences a été mené dans ce sens. Nous citerons celle du Leicestershire Mathematic Project. La méthode de travail employée était basée sur la manipulation d'objets et le jeu, de manière à ce que l'enfant apprenne les structures mathématiques suivant un mode voisin de celui dont il appréhende les structures du monde réel. Non seulement, l'acquisition se révèle plus solide et plus efficace, mais on s'est aperçu que cette exploration, mal-



gré ses risques et ses difficultés, enthousiasmait les enfants au lieu de les rebuter (15). Partant de ces différentes constatations, et bien que nous soyons restés trop fragmentaires sur le plan théorique, nous allons maintenant vous présenter deux outils :

• Le premier est une progression possible pour l'introduction de la numération ; il est inspiré des travaux de D. Bassis au sein du G.F.E.N. (Groupe français d'Éducation nouvelle) auxquels nous avons ajouté quelques remarques et commentaires découlant de notre praxis et de notre réflexion théorique.

• Le second est un outil de systémation linéaire de la numération, permettant un travail individualisé et des activités directement fonctionnelles pour la base dix.

UN EXEMPLE DE PROGRESSION EN NUMÉRATION

Au niveau élémentaire, les principes de numération sont donnés dès le départ. Si, parfois, jeu il y a, il n'est bien souvent qu'illustration des principes et apprentissage de leur maniement technique. Ici, c'est un peu l'inverse : c'est l'action de l'enfant qui prime : il crée, construit, invente, à partir de situations proposées par l'enseignant. Ne nous leurrons pas, il ne s'agit pas de laisser « l'éventuelle génialité de nos chérubins » tout découvrir... Qui croit encore cela possible ? L'enseignant est à l'écoute, présent comme un miroir, pour mettre l'enfant face aux contradictions qu'il rencontre, amenant la nouvelle situation qui autorisera les découvertes.

MATÉRIEL :
— des bûchettes, des allumettes ou des cure-dents (ou tout autre objet pouvant se grouper en s'attachant aisément ;
— des élastiques.

OBJECTIF :
Construction par les enfants du principe de numération, par nécessité.
Le travail s'effectue en base quatre ou cinq ; avec des nombres de trois chiffres. Pourquoi ne pas travailler directement dans le système décimal ? Les manipulations seraient beaucoup plus longues et fastidieuses du fait du nombre nécessairement élevé d'objets. De plus, la base dix n'est choisie que comme nécessité de communication et non pas comme une entité à part ; se priver de recherches dans d'autres bases devient une castration mathématique. Nous déconseillons les bases deux ou trois car elles sont limitatives quant à l'écriture puisque ne disposant que de peu de chiffres (0 et 1 en base deux ; 0, 1 et 2 en base trois).

1. Agir : de la nécessité de grouper.
Situation : chaque enfant a un tas d'allumettes (environ 30 à 40 dans le système décimal) avec comme consigne :
Vous avez devant vous un troupeau de moutons. Vous voulez les vendre. Vous voulez savoir combien vous en avez. Mais, dans votre pays, on ne sait compter que jusqu'à quatre (ou cinq). Que faire ?

Il va falloir grouper ; compter les animaux, ce sera faire des groupes de quatre moutons, puis des groupements de quatre groupes... L'enseignant sera là pour confronter les expériences, pour amener les comparaisons des méthodes employées.

2. Verbaliser :
La numération est une nécessité de communication, elle sert à dire, à traduire une réalité objective.
Situation : *Cherchez une phrase pour écrire au monsieur qui va venir acheter ce qu'il y a dans le pré.*
Il y a passage entre l'agir et la verbalisation de cet agir : que fait chaque enfant. Comment le verbalise-t-il ? Quels sont les différents types de verbalisation ?

3. Formuler :
Le travail va s'effectuer sur la formulation des différents types de groupements. Quels mots utiliser, que désignent-ils ? Cette recherche va permettre une approche de la notion de rang, d'ordre ; il y aura impossibilité à nommer les différents rangs d'une manière identique. Le moyen pour parvenir à cette découverte sera de confronter les actions effectuées par les enfants et les différentes verbalisations. En même temps, sera mise à jour la notion d'unité dans le rang avec, dans ce cas, possibilité d'utiliser un même vocabulaire.

Ces travaux nous font apparaître la nécessité d'une désignation verbale commune et précise (paquets, tas, mouton tout seul) et permettront l'élaboration par chaque enfant du concept que Bassis nomme « unités d'ordre différent » (désignation de l'unité dans le rang), concept fondamental en numération.

4. Coder :
L'étape suivante consiste à travailler sur le remplacement des mots par un codage pratique, d'abord quelconque puis, commun.

Situation : *Dans votre pays, une grave maladie arrive, plus personne ne sait écrire de mots. Que faire ?*

Le travail se déroulera autour des différents codages inventés par les enfants et sur les problèmes qu'ils posent (couleurs, signes faciles à construire, clairement identifiables...). Puis, par l'entremise d'un codage commun à la classe.
Exemple :

$\overline{3}\quad 10_{\square}\ ,\quad \overline{2}\quad 10_{\bullet}\ ,\quad \overline{1}\quad 10_{\triangle\triangle}),$

nous arriverons à l'écriture par chiffres, uniquement.

Situation : *Les gens de votre pays ne savent plus dessiner. Ils n'écrivent que des chiffres.*

Comment différencier l'unité de chaque rang : travail autour des trouvailles des enfants (couleur des chiffres, taille des chiffres, position des chiffres...). Cela permet de mettre au point l'écriture positionnelle des nombres.

Situation : Travail entre équipes ; chacune doit envoyer un message à l'équipe inverse (codage du nombre correspondant au tas d'allumettes).

Donner à chaque équipe des tas de bûchettes correspondant à des nombres comme 202, 310, 1 031 en base quatre. L'équipe recevant le message doit le décoder-déchiffrer.

5. Écriture positionnelle :
Chaque enfant va écrire la suite ordonnée des nombres dans la base de travail (4 ou 5). Il n'aura au départ aucune allumette, puis les ajoutera une à une ; écriture de nombres à un, deux, trois, quatre chiffres. Ce travail peut s'effec-

tuer dans différentes bases puis en base dix.

6. Base dix :
La recherche portera sur les particularités, les spécificités de cette base (vocabulaire, nombre de chiffres...).
Cette progression n'a rien d'extraordinaire, ni de définitif : elle n'est que le reflet d'un certain nombre de constatations et peut être adaptée au goût de l'enseignant, aux besoins de l'enfant... Simplement, dans ce travail, ce sont les enfants qui agissent et qui participent à l'élaboration de leur savoir : les différentes expériences permettent de mettre à jour deux caractéristiques fondamentales :
— les enfants trouvent du plaisir à la mathématique ;
— les savoirs sont solides parce que ne reposant pas sur des discours et un enseignement extradéterminés mais sur l'expérience et l'action.

UN OUTIL DE SYSTÉMATISATION DE LA NUMÉRATION

Cet outil et cette démarche ont été conçus avec des enfants en retard scolaire. Il est utilisé avec des élèves de 6e et 5e de l'école nationale de perfectionnement d'Albertville (enfants de 12 à 14 ans) et particulièrement avec ceux qui ont le plus de problèmes en mathématique. C'est un outil de systématisation de la numération écrite qui permet à chacun de travailler à son rythme, d'une manière individualisée. Il est loin d'être parfait, ni utilisable dans toutes les situations mais peut être aidant pour les classes spécialisées voire les classes uniques. Son défaut essentiel est d'aborder la systématisation de la numération en base dix, d'une manière linéaire mais difficile pour des raisons essentiellement pratiques de procéder autrement. Cet outil s'articule autour de quatre « objets » :
— un fichier de type autocorrectif,
— un fichier test,
— un panneau mural,
— un plan de travail individuel.

1. FICHIER AUTOCORRECTIF :
Il est composé de 600 fiches, 300 étant des exercices, le reste constituant les corrections. Six rangs de numération ont été définis :
— de 0 à 99,
— de 100 à 999,
— de 1 000 à 9 999,
— de 10 000 à 99 999,
— de 100 000 à 999 999,
— quelconque.
Il nous a semblé que cela était suffisant.
Chacun de ces six rangs est donc composé de 100 fiches (50 exercices et 50 corrections) construites sur le même mode. Nous nous bornerons à la présentation d'une seule de ces séries.
Cinq sortes d'exercices ont été retenues :
A) Écrire le nombre en lettres.
B) Tableau « avant/après » où l'enfant doit trouver le nombre qui précède ou celui qui suit selon des tableaux construits à partir de deux schémas :

Avant	Nombre	Après
?	47	?
?	64	?
...	...	...

Avant	Nombre	Après
68	?	?
?	?	41
...	...	...

C) Plus petit que, plus grand que, ou égale : < > ou =
C'est un exercice de comparaison des nombres au sein d'un couple.
D) Ranger par ordre croissant : « du plus petit au plus grand ». C'est un exercice de comparaison de nombres au sein d'un ensemble de nombres ; il permet de mettre à jour et de résoudre les problèmes de rang, et de désignation dans le rang.
E) Suite, comptage :
Il s'agit de compter de 2 en 2, de 5 en 5, etc. en avant ou en arrière : travail de systématisation de la suite, de l'ordre, du passage d'un rang numérique à un autre, de la récurrence.
Exemple : de 5 en 5, début 94, fin 39.

Il y a dix fiches pour chaque sorte d'exercices, numérotées de 1 à 10 selon la croissance de la difficulté : une fiche 10 étant toujours plus complexe qu'une fiche 1. Chacun va donc utiliser une fiche correspondant à son niveau et lui permettant de creuser un point difficile.

2. FICHIER-TEST :
Il s'agit d'un fichier correspondant au premier, permettant à chacun de passer un test lorsqu'il estime savoir, avoir acquis un type d'exercices. Il y a deux tests différents pour chaque sorte d'exercice, ce qui représente 10 fiches pour chacun des rangs et un total de 60 fiches.
C'est l'enseignant qui corrige le test en compagnie de l'enfant. Pour avoir acquis un exercice et passer au rang supérieur, la note minimale est élevée : en effet, du fait de la linéarité des situations, il est inutile de tenter de passer au rang supérieur sans être véritablement au point sur le rang précédent.
Les scores sont :
— 16 résultats exacts sur 20 pour les séries A (lettres) et E (comptage) qui sont les plus complexes ;
— 18 résultats exacts sur 20 pour les séries B (avant/après), C (>< ou=) et D (rangement croissant).

3. TABLEAU MURAL :
C'est un tableau à double entrée récapitulant le travail et les acquis de chaque enfant ; il est affiché en permanence dans la classe. *(Voir page suivante.)*

Lorsque l'enfant travaille sur un point particulier, il le note sur la ligne correspondante : **j'apprends**, puis lorsqu'il a réussi un test, il met un signe sur le ligne **je sais** en face de la case correspondante, et un autre au rang suivant dans la case j'apprends : cela lui indique le type d'exercices d'entraînement qu'il va devoir effectuer. Nous utilisons la couleur rouge pour **j'apprends** et vert pour **je sais**.

Grâce à ce panneau, chacun sait ce qu'il doit travailler ; il peut choisir en fonction de son rythme, de son désir, de ses besoins. L'exemple ci-dessus montre bien la différence entre deux enfants. A la limite, un enfant pourrait très bien avoir acquis tous les rangs pour un exercice et n'avoir pas débuté un autre type. Néanmoins, il est plus pratique d'éviter ces différences, essentiellement pour être plus efficace dans les activités parallèles (oral par exemple).

Un autre avantage, et non le moindre, de ce tableau est de permettre à un enfant de trouver un recours lorsque je ne suis pas disponible : il sait qui est susceptible de l'aider.

4. PLAN DE TRAVAIL :
Ce plan de travail est spécifique à la mathématique, dans la mesure où le groupe d'élèves qui l'utilise n'est pas issu de la même classe, et ne se retrouve que pour cette activité. Le plan de travail est hebdomadaire : chacun inscrit ce qu'il prévoit selon ses acquis, les activités collectives et son rythme de travail ; puis, au fur et à mesure, il inscrit ce qu'il a réalisé. En fin de semaine, nous évaluons en commun son travail (l'enfant + l'enseignant) ; chacun écrit son avis et le plan est visé par les parents pendant le week-end : cela leur permet de suivre la progression de leur fils.

Voir exemple : c'est plus parlant qu'un long discours. *(Plan page suivante.)*

En 1984-85, ce plan de travail a été utilisé pendant tout le premier trimestre, la numération étant le point fondamental de nos activités. Ensuite, il est remplacé par un plan plus complet faisant apparaître d'autres notions que les différentes opérations.

CONCLUSION

Les outils présentés dans les paragraphes II et III sont le schéma d'un type d'outil : ils ne sont ni figés, ni définitifs. Si nous avons voulu vous les présenter, après quelques remarques théoriques, c'est parce que la numération constitue le nerf, la colonne vertébrale de la mathématique. Certes, on peut penser

que la mathématique est une science inutile : là ne se situe point notre propos. Ce sont des considérations pragmatiques qui nous amènent à nous pencher sur ce berceau, et principalement celle-ci : les résultats en mathématique sont fondamentaux en ce qui concerne l'orientation des élèves dans leur scolarité.
N'est-ce pas une raison suffisante pour ne jamais oublier d'armer les enfants dans ce sens ?

Serge JACQUET
E.R.E.A.
3, avenue Winnenden
73200 Albertville

NOTES :
(1) University of Adelaïde « Research in science » T3, 1983 cité par le journal Libération *du 24.10.84.*
(2) E. Kant, Critique de la raison pure, méthodologie transcendentale, *Paris, Gibert, 1946, tome 2, p. 194-195.*
(3) A. Comte, Cours de philosophie positive, *Leçon 3, Paris Delagrave, 1920, p. 117-118-119.*
(4) Descartes, Réponses aux secondes objections, *Paris, Gallimard, La Pléiade, 1953, p. 387.*
(5) Z.-P. Dienes, Comprendre la mathématique, O.C.D.L., p. 23.
(6) Ibid p. 8.
(7) A ce sujet, consulter les travaux de P. Cimaz, E.N.I., Grenoble 1982.
(8) Ibid note n° 5, p. 128.
(9) Piaget, Psychologie et épistémologie - Pour une théorie de la connaissance, *Paris, Denoël et Gonthier, 1970, p. 21.*
Consulter aussi La formation des raisonnements récurrentiels, *volume XVII des* Études d'épistémologie génétique, *Paris, P.U.F.*
(10) Ibid n° 5, p. 125.
(11) Ibid n° 5, p. 124.
(12) D. Bassis, praticien-chercheur en mathématique, G.F.E.N.
(13) Ibid n° 5, p. 8.
(14) Revue in Mathématique moderne, mathématique vivante.
(15) Expérience citée par Dienes à plusieurs reprises dans ses différents ouvrages dont celui cité précédemment Comprendre la mathématique.

TABLEAU MURAL

Prénoms	Sait / Apprend	de 0 à 99					de 100 à 999					de 1 000
		A	B	C	D	E	AA	BB	CC	DD	EE	AAA BBB
		Lettres	Av. Ap.	> < =	Ordre	Suites	Lettres	Av. Ap.	> < =	Ordre	Suite	etc.
Pierre	J'apprends / Je sais	X *	X	X *	X	X	X		X	X		
Alain	J'apprends / Je sais	X	X *	X *	X *	X *		X	X	X		
etc.												

PLAN DE TRAVAIL

Nom - prénom : E...
Plan de travail n° : semaine du au

Activités		Je pense faire	J'ai fait	Avis de l'enfant
Numération	écrire en lettres (A)	AAA1-AAA4	AAA4-AAA3-test	
	avant-après (B)	BBB9-testBBB	BBB9-BBB3	
	>, <, = (C)	C1 – C3-C5	C1-C3-C5	
	ordre (D)	DD2-DD6DD8	DD2-DD6	
	comptage-suite (E)	E6-E7-E8	E6-E7-testE	Avis de l'enseignant
	Divers		Lecture de nombres	
	Géométrie	Le carré	Le carré	Avis des parents
	Autre		Fiches jeu n° 5 Lecture	