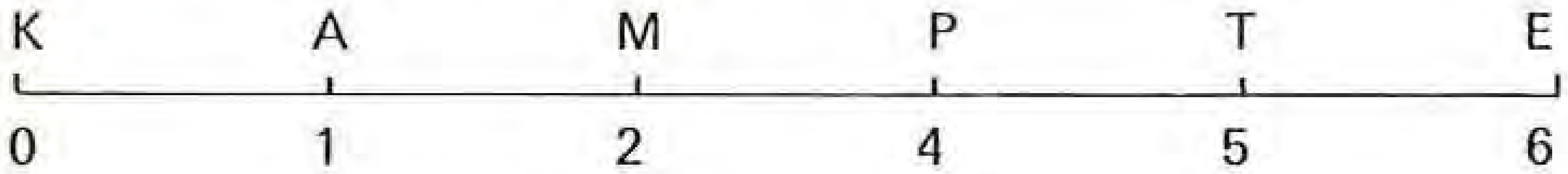
Une pédagogie du tâtonnement

Une recherche sur les longueurs des segments de droite en 6e

1. LE POINT DE DÉPART :

Au cours de travaux sur la demi-droite graduée avec une graduation entière, nous avons placé ainsi des points :



2. L'ACQUIS DU MOMENT :

La longueur d'un segment de droite sur une telle graduation est égale à la différence des deux nombres-repères.
Exemple :
long [M, T] = 5 − 2 long [M, T] = 3

3. UNE QUESTION D'ENFANT :

« On peut chercher la longueur de tous les segments de droite possibles avec ces six points ?
« Oui, mais ça en fait beaucoup ! Comment les trouver tous ? » disent certains autres.

4. LA DÉMARCHE :

Une recherche collective s'engage alors spontanément au tableau avec la participation de tout le groupe mais interventions plus marquées de quelques-uns.

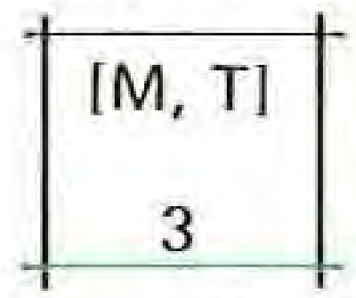
Nicolas : (très imaginatif) « Je pense faire une sorte de tableau pour associer les points ». Il construit alors celui de la figure 1 ci-après.

Critique du groupe immédiate : Il est mal organisé, on ne peut pas associer A et K...
Rectification de Nicolas qui construit le tableau (fig. 2) correct.

Part du maître : « Tiens, c'est intéressant... Y arriverons-nous ? » Déjà plusieurs l'ont entrepris sur leur feuille.
Pour beaucoup c'est une réussite rapide, j'en suis un peu étonné, alors je cherche à savoir pourquoi et d'où vient cette idée. Réponse collective : « Ça ressemble à une table d'addition ».

Un autre élève (je ne sais plus qui...) : « On n'a pas les longueurs... »

Nicolas intervient et commence à écrire dans les cases les longueurs qu'il détermine par simple dénombrement d'unités ainsi :



Stéphane : émet à ce moment-là une autre idée. « Je pense qu'on pourrait aussi écrire les nombres qui repèrent les points ». A son tour, au tableau il montre en complétant le tableau (fig. 3) et plusieurs acquiescent immédiatement, pendant que Stéphane montre que l'on obtient alors les longueurs par soustractions.

Réaction du groupe : Mais le groupe réagit très vite, les idées et les réflexions fusent :
— « Mais il y a des soustractions impossibles comme 2 − 5 !...
— Alors la soustraction n'est pas commutative comme l'addition !
— Pourtant la longueur de [P, A] est aussi 3, dit Claude.
— Eh ! oui, dit Thierry, tous les segments comme [M, T] et [T, M] ont la même longueur puisqu'il s'agit des mêmes points dans l'ordre inverse ! »

Cette réponse est satisfaisante pour tous au sujet des longueurs, elle permettrait de compléter le tableau des longueurs, mais elle n'est pas satisfaisante pour la lecture des soustractions proposée par Stéphane.

Part du maître : Alors j'interviens pour répondre à leur désir de rigueur nettement apparent ici :

« Nous avons deux tableaux (et même trois) celui des segments, celui des différences de nombres qui sont superposés. Peut-être pourrions-nous les séparer ? ». Nous laissons figurer les longueurs dans le tableau des segments, chacun entreprend volontiers et dans l'enthousiasme de faire les deux tableaux (fig. 4 et 5) que nous avons distingués nettement.

K	A	M	P	T	E
A	[A,A]	[A,M]	[A,P]	[A,T]	[A,E]
M	[M,A]	[M,M]	[M,P]	[M,T]	[M,E]
P	[P,A]	[P,M]	[P,P]	[P,T]	[P,E]
T	[T,A]	[T,M]	[T,P]	[T,T]	[T,E]
E	[E,A]	[E,M]	[E,P]	[E,T]	[E,E]

Fig. 1 : Premier tableau de Nicolas

	K	A	M	P	T	E
K	[K,K]	[K,A]	[K,M]	[K,P]	[K,T]	[K,E]
A	[A,K]	[A,A]	[A,M]	[A,P]	[A,T]	[A,E]
M	[M,K]	[M,A]	[M,M]	[M,P]	[M,T]	[M,E]
P	[P,K]	[P,A]	[P,M]	[P,P]	[P,T]	[P,E]
T	[T,K]	[T,A]	[T,M]	[T,P]	[T,T]	[T,E]
E	[E,K]	[E,A]	[E,M]	[E,P]	[E,T]	[E,E]

Fig. 2 : Deuxième tableau rectifié.

lecture des segments	K	A	M	P	T	E	
K	[K,K] 0	[K,A] 1	[K,M] 2	[K,P] 4	[K,T] 5	[K,E] 6	0
A	[A,K]	[A,A] 0	[A,M] 1	[A,P] 3	[A,T] 4	[A,E] 5	1
M	[M,K]	[M,A]	[M,M] 0	[M,P] 2	[M,T] 3	[M,E] 4	2
P	[P,K]	[P,A]	[P,M]	[P,P] 0	[P,T] 1	[P,E] 2	4
T	[T,K]	[T,A]	[T,M]	[T,P]	[T,T] 0	[T,E] 1	5
E	[E,K]	[E,A]	[E,M]	[E,P]	[E,T]	[E,E] 0	6
	0	1	2	4	5	6	

Fig. 3 : Le tableau complété par les longueurs et les différences des nombres entiers naturels qui repèrent.

Quelques commentaires et réflexions :

Sans faire une analyse détaillée, je voudrais attirer l'attention sur quelques points montrant qu'il existe toujours des éléments positifs dans une recherche banale, ne serait-ce que dans l'attitude ou la démarche de l'enfant.

A propos de recherche collective :

Cette recherche collective avec tout le groupe classe, mais spontanée, est née au cours d'un travail banal sur la graduation d'une deml-droite prévue au programme (la graduation ayant été introduite par l'apport d'une élève sur le plan d'une ligne d'autobus en ville).

lecture des segments	K	A	M	P	T	E
K	[K,K] 0	[K,A] 1	[K,M] 2	[K,P] 4	[K,T] 5	[K,E] 6
A	[A,K] 1	[A,A] 0	[A,M] 1	[A,P] 3	[A,T] 4	[A,E] 5
M	[M,K] 2	[M,A] 1	[M,M] 0	[M,P] 2	[M,T] 3	[M,E] 4
P	[P,K] 4	[P,A] 3	[P,M] 2	[P,P] 0	[P,T] 1	[P,E] 2
T	[T,K] 5	[T,A] 4	[T,M] 3	[T,P] 1	[T,T] 0	[T,E] 1
E	[E,K] 6	[E,A] 5	[E,M] 4	[E,P] 2	[E,T] 1	[E,E] 0

Fig. 4 : Tableau des segments et leur longueur tenant compte de l'observation de Thierry.

Pourquoi la recherche collective ?

• D'abord parce que nous sommes dans une période de déblocage, où la recherche individuelle ou par équipe sur des sujets vraiment libres n'a pas vraiment démarré ou du moins n'a pas encore un caractère vraiment mathématique ; ensuite, dans le « domaine géométrique » nous avons jusqu'alors pratiqué surtout des manipulations provoquées par moi, introduisant du vocabulaire et des notations au cours des expériences, mais pendant ce travail plus guidé je laisse intervenir les enfants à tout moment, et je leur montre ensuite que c'est une véritable recherche mathématique que nous avons vécue. De plus, dans ces recherches collectives, des leaders, qui existent, entraînent le groupe-classe ; il se crée ainsi une certaine ambiance de groupe, un enthousiasme dans la réussite qui rejaillit sur chacun dont je profite pour lutter contre un individualisme exagéré qui existait.

• Ce qui me paraît important dans ces moments de recherche collective, c'est « la *combinatoire des idées émises* » qui explique la rapidité et la richesse des créations, des constructions ; ainsi je pense que l'idée émise par Stéphane a été provoquée, d'une manière inconsciente sans doute, par la réflexion de certains « ça ressemble à une table d'addition »...

lecture des différences	0	1	2	4	5	6
0	0					
1	1	0				
2	2	1	0			
4	4	3	2	0		
5	5	4	3	1	0	
6	6	5	4	2	1	0

Fig. 5 : La table de soustraction isolée et « normalisée » qui a donné lieu à d'autres observations.

A propos du couple CRÉATIVITÉ-CONNAISSANCE :

Si j'analyse comment une telle « structure » a pu se construire si rapidement, être accessible à tous aussi (ce qui n'est pas toujours le cas avec une recherche individuelle), je découvre alors la part de l'acquis, de la connaissance qui intervient dans ce processus de créativité, en effet :
— la table de Pythagore déjà rencontrée à propos d'addition est prépondérante,
— la notion de couple a été transférée sur les points pour former les segments,
— la commutativité de l'addition opposée à la non commutativité de la soustraction.

Ce sont ces acquis précédents qui ont joué un rôle plus ou moins conscient chez certains enfants.

La part du maître : bien que faible, elle existe cependant sous divers aspects :
— valoriser le premier tableau au moment où le groupe hésitait,
— animer le débat, faire intervenir Stéphane peu sûr de lui au moment où l'idée naissait dans son esprit,
— faire émerger les questions ou critiques,
— veiller aussi à cette rigueur évoquée par C. ROBIOLLE.

Un bilan :

Bien sûr, dans cette construction du *produit cartésien,* de *l'application* « a pour longueur », de la *table de soustraction* dans N mais surtout dans la mise en évidence de la condition d'existence $a \geqslant b$, tout n'a pas été définitivement dégagé, tout le vocabulaire n'a pas été donné ; ce fut cependant l'occasion d'introduire la relation « $\geqslant$ » pour des nombres naturels. En effet, cette situation vécue intensément par le groupe, servira de référence en d'autres occasions.

Pour conclure, je voudrais insister sur toute *la richesse* qui existe même dans une *recherche banale,* richesse dans les idées, les démarches, les attitudes qui nous surpend toujours !

Edmond LÈMERY
64, boulevard Berthelot
63000 Clermont-Ferrand

Auteur du livre récemment paru chez Casterman (Collection E3 témoignage) « Pour une mathématique populaire ».

Nous souhaitons recevoir des opinions, d'autres réflexions, des documents afin de réaliser des outils qui nous soient utiles, mais leur réalisation demande du temps et des travailleurs... Les prévisions doivent se faire au moins un an à l'avance...

Alors, soyez coopératifs, réagissez, participez... ne nous laissez pas prendre des décisions et assumer le travail à quelques-uns !

Commission Math-I.C.E.M.