# HISTOIRE DE LOGIQUES

*Jean DUPONT*

Je m'étais dit naïvement : « Je vais essayer de faire un article sur les maths pour préciser nos positions. » Comme j'avais compris qu'il était beaucoup plus facile d'exposer les idées des autres que d'en avoir à soi, j'avais compulsé nos éditions et j'avais trouvé dans un *Educateur* de l'an dernier, extrait d'un article intitulé *« La porte ouverte »* et signé Bernard Monthubert, une merveilleuse citation qui me faisait un excellent point de départ.
Pour que vous puissiez en profiter, et aussi pour que mon travail de recherche soit utilisé, je vais vous la livrer :

*« Voyons seulement selon quels processus l'enfant prend possession de cette mathématique, disons plus généralement, de la mathématique car l'adjectif « moderne » précise surtout l'angle sous lequel on la regarde, les chemins par lesquels on l'aborde. A notre avis, deux de ces chemins sont à privilégier : celui de la structuration des situations vécues et celui de la création partant d'observations, de propositions extérieures ou d'inventions personnelles. »*

Partant de là, me disais-je, il me sera facile d'expliquer comment par le calcul vivant nous arrivons à structurer des situations vécues, comment par la recherche libre nous favorisons la création de l'enfant et comment dans tout cela la mathématique moderne est un outil et non pas une fin en soi.

Cela me semblait facile. Pourtant, les rares gens qui me voyaient passer, car je ne sortais plus guère, pouvaient remarquer mon front pensif.
Car le reste ne venait pas, je n'arrivais pas à mettre la suite sur pied.

C'est alors que la Providence (ce qui prouve bien qu'elle doit exister) est venue à mon secours. Ça s'est passé un radieux matin de rentrée, le 3 janvier 1974. On venait de se dire tout ce qu'on avait à se dire à propos des vacances et comme le sujet était épuisé, on décida de lire quelques textes libres, comme ça, histoire que les gens ne puissent pas dire que l'on faisait rien dans ma classe.
Ce fut le texte de Françoise qui fut l'étincelle :

*LES VACANCES*

*J'aime et je n'aime pas les vacances.*
*J'aime les vacances car on se repose et on peut s'amuser.*
*Je n'aime pas les vacances car ma sœur et moi souvent nous nous disputons.*
*J'aime les vacances car je peux faire ce qui me plaît mais je ne les aime pas car il faut parfois travailler.*

D'abord on a ri, sans doute parce qu'on est bête car on ne savait pas pourquoi. *« Ah ! ah... elle aime et elle n'aime pas... »*

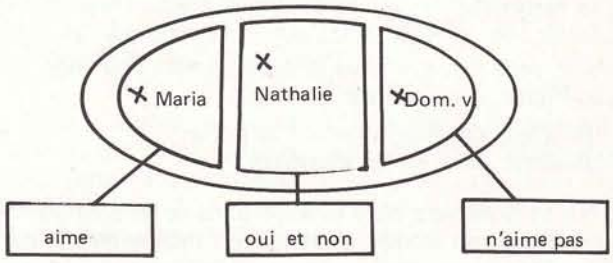
Comme je craignais d'être dépassé par le chahut naissant, je repris la situation en main en posant une question perspicace :
*« Et vous autres, qu'en pensez-vous ? »*

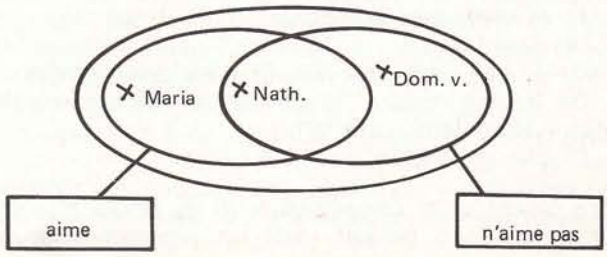
Très vite, trois catégories se dessinèrent : ceux qui aimaient, ceux qui n'aimaient pas et ceux qui, comme Françoise, aimaient et n'aimaient pas tout à la fois. Pour ma part, ayant à sauvegarder mon image de marque, je préférai ne pas m'inscrire dans la catégorie qui me plaisait le plus.

| AIME | N'AIME PAS | OUI ET NON |
|---|---|---|
| Maria<br>Véronique<br>Annie<br>Georgette<br>Daniel<br>Pascal M.<br>Dominique G. | Dominique V.<br>Antonio<br>Bernard<br>Pascal P.<br>Maryse<br>Alfredo | Nathalie<br>Françoise D.<br>Françoise J.<br>Catherine<br>Dominique S. |

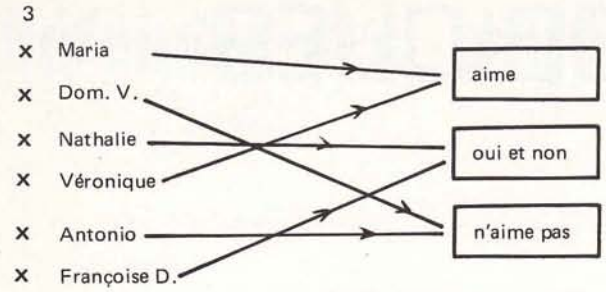
Ayant fait un effort considérable pour mettre au tableau ce tableau, je dis alors d'un air futé :
*« Et bien, maintenant, cherchez donc ce que vous voulez. »*
Et ceci étant dit, je me dirigeai vers la fenêtre pour contempler les corbeaux qui eux étaient encore en vacances. Je fus tiré de mes comparaisons méditatives sur l'existence des corbeaux et sur la mienne par l'agitation qui se passait derrière mon dos. Je me retournai et vis les élèves qui cherchaient fébrilement, qui cherchaient et qui trouvaient !

Au tableau on mit les résultats des recherches :

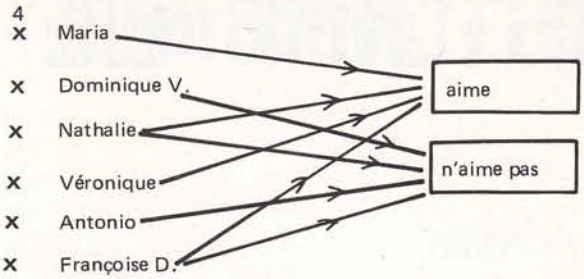


3




4



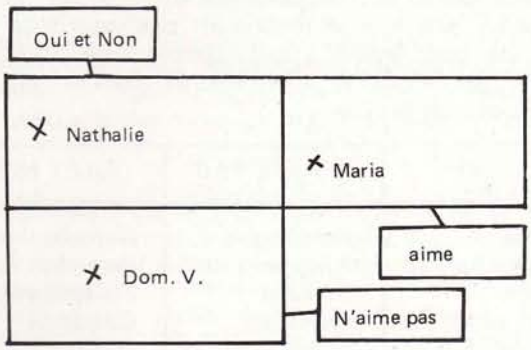

5

| | Maria | Dom. V. | Nath. | Véro. | Anton. | Fran. D. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Aime | X | | | X | | |
| N'aime pas | | X | | | X | |
| Oui et non | | | X | | | X |

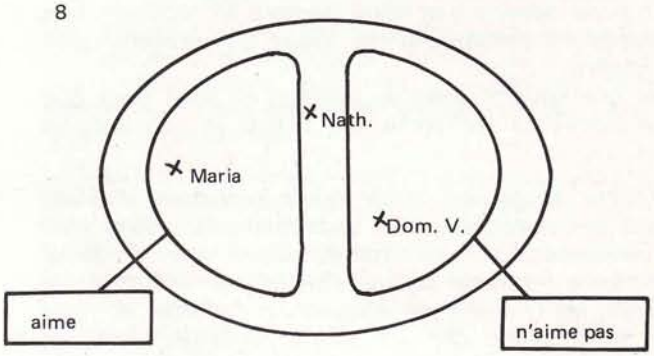
6

| | Maria | Dom. V. | Nath. | Véro. | Anton. | Fran. D. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Aime | X | | X | X | | X |
| N'aime pas | | X | X | | X | X |

7




8




Il y avait d'autres représentations, mais elles revenaient à l'une de celles données dans l'éventail des huit. Nous commençâmes une discussion qui nous ouvrit de nouvelles perspectives.

D'abord il manquait une catégorie. La représentation 8 laisse entre « aime » et « n'aime pas » la place pour les « oui et non », mais il pourrait y avoir une autre catégorie, les « ni oui ni non », les indifférents.
Ensuite tout cela manquait de nuances. Dans chaque catégorie on avait rangé ensemble ceux qui aimaient, ceux qui n'aimaient pas... mais ce n'était pas forcément pour la même raison qu'on aimait ou qu'on n'aimait pas.
Il faudra donc chercher encore mais, de toutes façons, le propos de cet article n'est pas dans le compte rendu de la recherche.

Le soir, mes travaux sous le bras, je vais voir mon ami Jean-Pierre, celui qui s'y connaît.

— Bonjour, dis-je en ouvrant la porte.
— *Bonsoir,* dit-il en la refermant.

Au fur et à mesure qu'il avance dans la lecture de nos recherches, son visage s'allonge en même temps qu'il pâlit. Après un long silence, témoignage de son immense désarroi, il finit par me dire :

— *Tu te rends bien compte...*
— De quoi ?
— *De ce que vous avez fait. Ce n'est pas possible...*
— De toutes façons, c'est bel et bien possible, puisque les enfants l'ont fait.
— *Eh bien mon vieux...*

A ce niveau de la conversation, je ne savais toujours pas ce qu'il en pensait mais un pressentiment me laissait imaginer que c'était plutôt du mal que du bien. En peu de temps ma prémonition devint réalité :

— *Mais c'est abominable votre truc... Une intersection entre les OUI et les NON... Tu ne te rends pas compte.*
— Je me rends compte que nous avons traduit une situation vécue, un point c'est tout.
— *Mais c'est contraire à la théorie des ensembles cette intersection entre AIME et N'AIME PAS... d'ailleurs tout le mal vient de là, tu n'as pas le droit de prendre comme critère « aime » ou « n'aime pas », c'est un critère subjectif... c'est comme les yeux bleus.*

Les siens n'étaient pas bleus d'yeux, il étaient noirs de fureur.

— Que veux-tu, la théorie des ensembles nous a paru incapable d'être utilisée pour résoudre cet exemple, alors nous en avons cherché une autre, lui dis-je pour le calmer.

— *Que tu inventes, et d'une, et qui portera tort à la théorie des ensembles, et de deux.*
— Que j'invente, que j'invente. Ce n'est pas si sûr. Il y a d'autres théories que la théorie des ensembles, d'autres logiques que la logique binaire.
— *Mais qui leur portera tort, ça c'est sûr. Je trouve scandaleux que tes élèves aient pu faire une intersection entre les oui et les non, ça prouve qu'ils n'ont rien compris à la théorie des ensembles* (note 1).

Là, j'ai failli être coincé. J'ai relacé ma chaussure et en me relevant, j'avais ma réponse.

— Moi, je ne suis pas de ton avis. Je trouve au contraire remarquable qu'ils ne soient pas absolument sclérosés par le formalisme et le dogmatisme d'une théorie, qu'ils soient capables de dire : « On change les règles et on fait autrement. » Ça me semble une saine réaction. Là-dedans, c'est la démarche axiomatique qui

est importante. Qu'ils n'aient pas eu l'imagination de trouver d'autres représentations que celles qu'ils connaissaient me semble un conditionnement déjà bien suffisant.

Là, j'ai dû marquer un point car la réponse se fait attendre. Mais la voici, violente et hargneuse :

— *Ah ! Je te reconnais bien là. Parce que tu as entendu parler d'une nouvelle théorie, tu brûles aujourd'hui ce que tu adorais hier et tu te mêles de leur apprendre des billevesées que tu ne connais même pas.*

— Mais je ne me mêle pas de leur apprendre une théorie quelle qu'elle soit, pas plus la théorie des ensembles (qui est bien au-delà de la portée des enfants et aussi de la mienne) qu'une autre.

S'ils ressentent le besoin de créer un autre système d'axiomes (car c'est de cela qu'il s'agit en réalité) je ne vois pas pourquoi je le leur refuserais. A plus forte raison si je sais que cela correspond à une recherche réelle des mathématiciens, mais même si je l'ignore ! Quoi qu'il en soit, c'est une ouverture, peut-être sur une théorie importante, pour le moins sur un mode de réflexion. Et on parle souvent d'expériences fondamentales, n'en est-ce pas une ?

— *Tu parles, et à quoi ça leur servira toutes ces ouvertures s'ils ne savent pas ce qu'ils doivent savoir.*

— Rassure toi, je tiens compte de leurs besoins et de leurs intérêts. Ils sauront ce qu'ils doivent savoir, et je prétends même qu'ils le sauront bien car ils l'auront assimilé de façon active et intelligente. C'est stupide ce que tu dis. Les maths modernes ne nous ont pas empêchés, nous, de faire du calcul et je ne vois pas pourquoi j'abandonnerais la théorie des ensembles qui nous rend par ailleurs de réels services. Maintenant, à quoi ça leur servira : je ne sais pas au juste à quoi, mais certainement à beaucoup. Parce que tu comprends, les enseignements du type tout ou rien : par une droite une seule parallèle et une seule, oui ou non ; vrai ou faux, allumé-éteint, garde-à-vous- repos, ça leur apprend peut être une chose, mais j'ai de plus en plus dans l'idée que ça les empêche d'apprendre d'autres choses. Et des autres choses, il y en a...

— *Ce qu'il y a de bien avec toi, c'est que tu es toujours certain d'avoir raison.*

— Mais bien sûr que je suis certain d'avoir raison... car si j'étais certain d'avoir tort : je me tairais. Tu vois, ça aussi c'est une logique, je ne sais pas laquelle, mais elle ne me semble pas mauvaise non plus.

— *Je ne sais pas s'il faut voir les choses d'une manière aussi simpliste. Car si tu n'as sans doute pas tout à fait tort, tu n'as pas tout à fait raison non plus.*

— Qu'est-ce que tu viens de dire ?

— *Que tu n'as pas tout à fait tort ni tout à fait raison non plus.*

— Brave ami, lui dis-je en l'embrassant. Il me regarde l'air surpris et incrédule ; au fond de son regard je crois même déceler un peu de crainte.

— *Mais pourquoi ?...*

— Pourquoi ! Tu vas le voir. Tu vas prendre un crayon et une feuille de papier d'une main, ta théorie des ensembles de l'autre main et tu vas essayer de représenter ce que tu viens de me dire : *ni tout à ait tort ni tout à fait raison* (notes 2 et 3).

Je n'ai pas bien compris ce qu'il m'a répondu à ce moment-là, mais il me semble que ce n'était pas bien, mais alors pas bien du tout.

Jean DUPONT
La Frette
71 - Montret

# quelle logique ? quelle pédagogie ? et quelle mathématique ?

*Bernard MONTHUBERT*

A la lecture de l'article précédent, de Jean Dupont, j'ai pensé que son ami Jean-Pierre ne serait sans doute pas seul à grincer des dents. Alors pour les faire grincer complètement ou pas du tout (c'est de la logique binaire )... j'ai eu envie d'apporter quelques compléments d'information.

**Note 1 :**

Les représentations si « scandaleuses » proposées par les enfants ne correspondent en réalité qu'à une interprétation du vocabulaire soit moins restrictive, soit plus restrictive au contraire.

— Pour certains aimer les vacances, c'est avoir de l'amour pour elles, du plaisir à y être, et ne pas les aimer ce n'est pas, ne pas avoir de cet amour, de ce plaisir mais aussi avoir du chagrin, un peu de haine.

Cela n'existe-t-il pas dans de nombreuses tragédies ? Cela n'est pas mathématique ? Cela voudrait dire que la mathématique n'est pas capable de s'adapter à une situation de vie complexe !

Bien sûr, la mathématique est un système dans lequel le raisonnement ne souffre pas de faille, qui n'a pas à se modifier selon le cas sur lequel on l'applique, qui n'a pas de contenu sémantique mais le travail du mathématicien (ou du physicien, du biologiste, de qui que ce soit utilisant le raisonnement mathématique) n'est-il pas de trouver quel modèle mathématique est applicable, quel système d'axiomes permettra de clarifier la recherche ?

Alors vues sous cet angle, les représentations des enfants sont absolument correctes (n° 2, 4, 6 et 7 selon la signification que l'on donne au dessin : diagramme de Carroll ou partition).

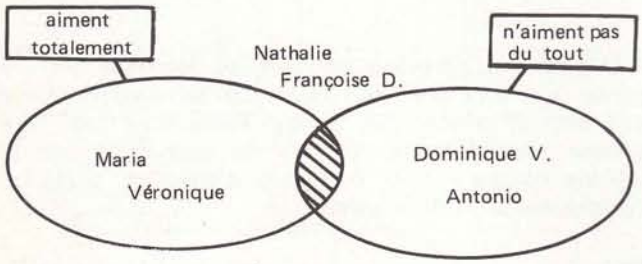
— Pour d'autres, le oui et le non sont catégoriques. C'est un oui total, sans aucune réticence, et un non total, sans aucun désir. Cette fois ce sont les représentations 1, 3, 5, 7 (peut-être, si partition) et 8 qui correspondent à l'idée exprimée.

Il aurait pu d'ailleurs être intéressant de voir la correspondance entre la catégorie dans laquelle se plaçaient les enfants et la représentation qu'ils proposaient. Personnellement je verrais sans étonnement les enfants comme Françoise représenter cette situation par des diagrammes de type 2, 4, 6, alors que les « ricaneurs » du début présenteraient sans doute plutôt les 1, 3, 5, 8. (Ceci n'est bien sûr pas une certitude.) Il pourrait être également intéressant de comparer les milieux de vie relativement aux types de réponses.

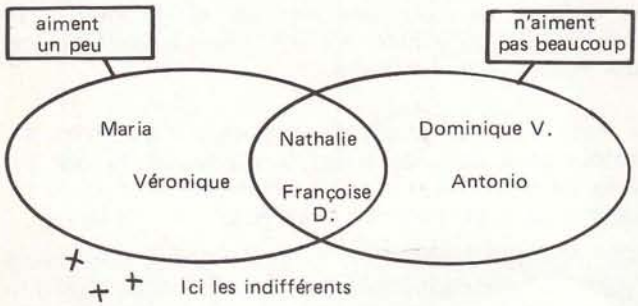
Le lecteur de cet article, tout comme Jean-Pierre, aura sans doute été beaucoup plus choqué par l'intersection des oui et des non (cas 2, 4, 6) que par la partition (1, 3, 5, 8) ensembles disjoints et complémentaires. Ces dernières représentations ne sont pourtant pas plus valables en fonction des critères habituels admis dans les classes. En effet elles signifient que Françoise D. et Nathalie n'aiment pas du tout les vacances et ne les haïssent pas du tout non plus. Ce qui bien sûr est absolument faux.

En réalité, il aurait suffi de définir différemment nos ensembles. Notre étonnement ayant été provoqué par notre habitude (déjà trop ancrée) du tout ou rien, juste ou faux, bien ou mal.

Par exemple :



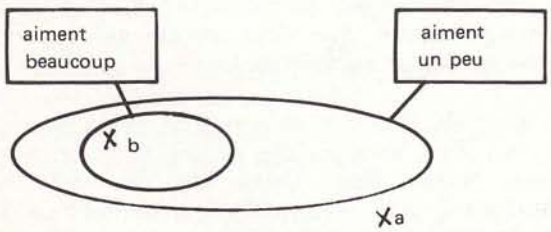

Finalement cela correspond aux cas 1, 3, 5, 7, 8




Cela correspond aux cas 2, 4, 6, qui sont donc les plus complets

Vous avez peut-être encore de la réticence à admettre cette représentation. Pourquoi Véronique est-elle placée à cet endroit, alors qu'elle aime beaucoup les vacances ? Pensez seulement que si l'on aime beaucoup quelque chose, on l'aime au moins un peu. Littérairement on fait la nuance entre :

— Je n'aime pas, même un peu (a) Je n'aime pas du tout.
— Je n'aime pas qu'un peu (b) J'aime beaucoup.




Complétez par l'ensemble de ceux qui n'aiment pas beaucoup, c'est-à-dire de ceux qui n'appartiennent pas à l'ensemble des enfants qui aiment beaucoup (il y aura ceux qui aiment, mais pas totalement, et ceux qui n'aiment pas du tout) et vous aurez la représentation proposée ci-dessus.

Vous vous direz peut-être que ce sont des subtilités et que ce langage n'est pas mathématique car pas universel, mais le symbolisme, lui, est-il universel ? (Pour vous en convaincre, consultez donc un certain nombre de manuels scolaires et demandez aux mathématiciens professionnels ce qu'ils en pensent, eux qui ne comprennent pas le langage inventé de toutes pièces que les auteurs proposent parfois !)

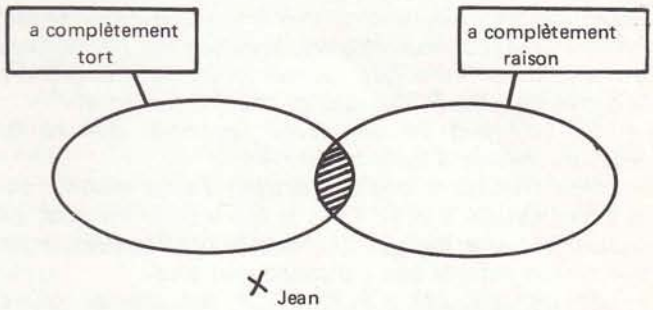
Tout symbolisme est valable (à condition de savoir qu'il est symbole, donc convention), tout axiome est valable, à condition qu'il n'y ait pas contradiction. Et d'abord qu'il ait été clairement explicité.

Notre travail à nous, éducateurs en mathématiques (eh oui, là encore nous devons être éducateurs et non pas enseignants, dès le primaire et a fortiori, la maternelle) ce n'est pas d'apprendre aux élèves des connaissances précises mais de les aider à agir selon une démarche mathématique. Et cela ne signifie pas partir du plus simple pour arriver au compliqué comme on a tenté (et tente souvent encore) de nous le faire croire dans l'enseignement secondaire, mais le contraire, car la vie est complexe, pour essayer d'analyser, de comprendre.

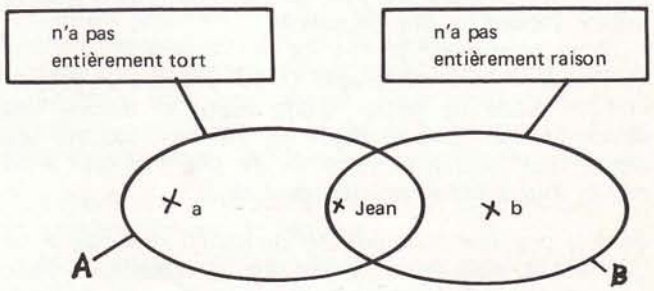
Jean Dupont ne nous a pas donné le développement de sa recherche. Il a eu raison puisque ce n'était pas le sujet de son article. Son but n'était pas de nous donner une information mathématique ni même pédagogico-mathématique (pour cela nous avons réalisé déjà trois séries de livrets *« Structures de Vie, Structures Mathématiques »* dont la lecture vous donnera de nombreux exemples du sens de notre démarche) mais il est certain que leur travail (maître et groupe d'élèves) a d'abord été d'expliciter clairement les différentes représentations.

**Note 2 :**

Si vous avez envie de vous amuser à chercher des représentations de cette dernière idée, ne lisez cette note qu'après être allé au maximum de vos recherches. Quoi qu'il en soit, pour votre réflexion, je vous propose quelques diagrammes qui ne sont pas toujours tellement évidents.




Ici, l'intersection bien sûr est vide puisqu'on ne peut avoir en même temps complètement tort et complètement raison.
Mais l'intersection de leurs complémentaires ?
Voyons le diagramme suivant :




— « a » a complètement raison,
— « b » a complètement tort,
— « Jean » n'a ni complètement tort ni complètement raison.

Cette représentation vous laisserait un léger malaise que je n'en serais pas étonné. Le mieux est que vous essayiez alors de comprendre seuls. Il est encore temps de refermer cet *Educateur.* Vous le rouvrirez après réflexion...

Maintenant étudions cela ensemble :
« B » est l'ensemble de ceux qui n'ont pas entièrement raison. « a » n'appartient pas à cet ensemble, c'est donc qu'il a entièrement raison. En effet s'il n'avait pas « entièrement raison », il appartiendrait à « B ».

Jusque-là c'est simple, on admet facilement mais quant à accepter de voir « a » dans l'ensemble de ceux qui n'ont pas entièrement tort, cela nous gène un peu, puisque ayant entièrement raison, nous estimons qu'il n'a aucun tort. Et pourtant j'espère que vous pensez bien accorder un quelconque esprit mathématique à ceux de vos élèves qui ne font pas entièrement de travers chacune de leurs recherches. Donc pour avoir à vos yeux une forme d'esprit mathématique, il ne faut pas faire tout de travers. Je serais étonné que vous refusiez cet esprit à ceux qui conduisent le plus efficacement leurs recherches.

Le mal vient bien sûr de l'incertitude du langage habituel, dans lequel on ne sait pas toujours, sans l'aide du contexte, ce que certains mots signifient.

Ici, cela se joue sur le mot « pas », S'applique-t-il au mot *« entièrement » ?* Dans ce cas : (n')a *« pas entièrement »* tort, signifie : avoir malgré tout quelques torts.

Si au contraire le mot *« pas »* s'applique à *« entièrement tort »,* on **peut** avoir dans ce cas aucun tort.

Dans un texte littéraire, le contexte nous guide et sans que l'on y pense nous permet d'interpréter. Le contexte, c'est en quelque sorte les axiomes. C'est la définition de notre langage. Et lorsque malgré tout le texte reste équivoque, on ajoute des explications supplémentaires.

Les enfants (et pourquoi pas les adultes) qui poursuivent une recherche math font de même. Leur vocabulaire (graphique et symbolique) est fonction de la progression de leur recherche, des acquis précédents, des sous-entendus presque inconscients parfois, mais l'approfondissement, et surtout la communication au groupe nécessitent des précisions, la définition du « jeu mathématique ».

Aucun langage mathématique ne peut signifier universellement de par lui-même. Et c'est peut-être à ce niveau que se tient l'erreur fondamentale de l'enseignement élémentaire et secondaire. On pense qu'un enfant ne comprend rien à la mathématique alors que c'est le langage qu'il n'a pas compris.

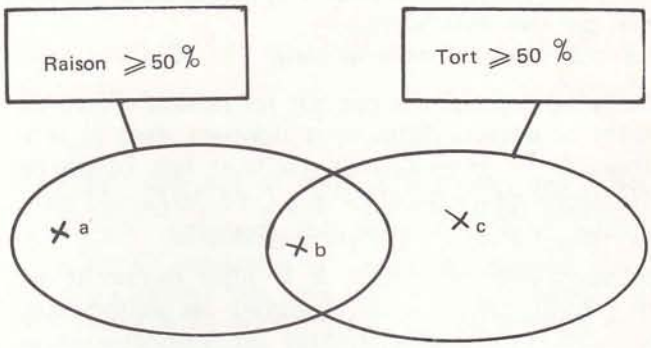
Toute systématisation de représentation ou de symbolisme incite à confondre signifiant et signifié, à penser que la mathématique c'est la langue (orale ou écrite) alors qu'en réalité cette langue n'est qu'une façon arbitraire de représenter quelque chose qui est, indépendamment d'elle.

**Donner** aux enfants des types de représentations (qu'ils ne se sont pas construits eux-mêmes), leur présenter dès le départ des symboles « universels », est la façon la plus efficace de leur interdire toute construction de la personnalité mathématique.

En effet comment quelqu'un, à qui l'on a offert la mathématique toute une vie comme quelque chose d'universellement vrai, qui n'a pas compris que le vrai se situait au niveau du raisonnement (sur la base des axiomes choisis), du développement et non à celui des événements eux-mêmes, comment celui-ci pourra-t-il s'extraire de ce système pré-établi s'il n'a pas le refus du fou de se laisser conformiser, mouler en série. Cela s'appelle le génie dans certains cas mais dans combien d'autres, inadaptation ou plus simplement inaptitude !

**Note 3 :**

Et cette représentation, qu'en pensez-vous ?




Ici, avoir tort signifie avoir des torts. De même bien sûr pour avoir raison.
Trop complexe pour être mathématique cela aussi ? Ou plutôt trop subjectif ? Comment répondre à cette question ?
Peut-être tout simplement chacun en son âme et conscience !
Mais n'est-ce pas fréquent ce besoin, en justice, en économie, en politique et précisément en Education !

Sans chercher à nous justifier, disons toutefois que si, dans les recherches dites « logiques » on admet implicitement (sans les avoir jamais énoncées d'ailleurs !) les lois principales de la pensée, selon Aristote :

— Identité : Tout ce qui est, est.
— Contradiction : Rien ne peut être et ne pas être à la fois.
— Exclusion : Tout doit être ou ne pas être.

Il n'en est pas moins vrai que certains logiciens modernes dépassent l'algèbre de BOOLE (autant que Boole avait dépassé Aristote) avec l'emploi de logiques à plusieurs valeurs dans lesquelles on pourra dire que tel événement est partiellement vrai et partiellement faux : un peu l'un et un peu l'autre, peut-être plus l'un que l'autre.

Les enfants rejoignent tout naturellement — mais inconsciemment bien sûr — les vrais mathématiciens... à condition évidemment que la mathématique n'apparaisse pas à leurs yeux comme une connaissance à acquérir mais comme une construction vivante.

Je laisserai pour finir, et pour votre méditation, la parole à John Von NEUMAN, l'un des plus grands mathématiciens de ces dernières années, créateur de la théorie des jeux (qui serait utilisée à des niveaux politiques très élevés) :

*« En mathématique, la meilleure part de l'inspiration vient de l'expérience... il est presque impossible de croire à l'existence d'un concept de rigueur, absolu et immuable, que l'on pourrait dissocier de toute expérience humaine. »*

Bernard MONTHUBERT
60, résidence Jules Verne
86100 Châtellerault