

Structures de vie, structures mathématiques

Trois séries de livrets : « Structures de Vie, Structures Mathématiques » sont éditées (trois autres séries suivront). Nous avons établi un index qui permettra, à ceux qui le possèdent, une meilleure utilisation (voir p. 26). Ces livrets, réalisés coopérativement, représentent une certaine somme d'informations mathématiques et nous permettent de préciser notre conception de la pédagogie des mathématiques à travers les comptes rendus de notre pratique pédagogique. Il s'agit d'ouvrages destinés aux enseignants qui leur permettront une approche de la mathématique et des enfants. Cette approche se différencie de celle de la pédagogie classique.

— C'est en cela qu'aucun des livres ou cahiers pour élèves ne nous satisfait entièrement.

— C'est en cela que nous prétendons avoir fait œuvre originale.

Originale d'abord par son centrage sur les enfants travaillant en libre recherche. Il y a là, pour nous, un facteur essentiel auquel nous nous reporterons toujours. Par « libre recherche » nous entendons que des enfants, à partir d'une situation apportée par l'un d'eux et dans laquelle ils ont investi leurs motivations et leur potentiel affectif, opèrent des raisonnements pour rationaliser cette situation et la rendre communicable. Un dialogue s'instaure alors dans le groupe. De cet échange se dégagent, parfois confusément, des acquisitions tributaires de la situation. Ces acquisitions trouveront peut-être à être réinvesties dans des raisonnements ultérieurs. Nous nous soucions très peu de les faire connaître de façon systématique aux enfants, contrairement aux éditions scolaires présentées généralement. L'intérêt essentiel est dans les démarches et dans la construction, pas à pas, d'un champ d'expériences et de savoir-faire propice aux découvertes et aux prévisions. Cette démarche cependant n'entraîne en aucune façon une diminution des connaissances. Bien au contraire celles-ci se trouvent acquises beaucoup plus solidement.

Plusieurs questions se posent d'emblée à qui est au contact des enfants dans l'optique précisée ci-dessus :

— Lors de ses tâtonnements, de ses approches, de ses découvertes, comment procède l'enfant (ou plutôt les enfants, « l'enfant » étant pour nous une abstraction que nous nous soucions peu de définir) ? Lors de la rationalisation progressive des phénomènes à laquelle aboutissent les tâtonnements, même les plus imprévus ou les plus aléatoires, quelles sont les structures mentales, les concepts mis en jeu ?

— Ces structures de pensée, ces concepts, ont-ils quelque rapport avec les structures et les concepts qui constituent le champ de jeu des mathématiques ?

Voilà pour nous les interrogations primordiales d'où découle notre démarche, celle-là même exposée dans cet ouvrage.

Mais pouvoir répondre à ces questions, c'est aussi pour l'enseignant, savoir ce qu'on met sous le mot de « mathématiques ». Mot inquiétant, qui rappelle à beaucoup les difficultés rencontrées sur les bancs du lycée, auquel on fait appel chaque fois qu'il s'agit de donner un exemple de pensée rigoureuse, dépouillée (mais cela reste encore à prouver) de toute subjectivité. Ce mot est d'autant plus inquiétant pour certains qu'il est maintenant affublé du qualificatif « moderne » (voir la note de B. Monthubert à ce sujet, en fin d'article).

Cela dit, comment se présentent ces livrets ? Dans les 15 premiers nous donnons les notions fondamentales de la théorie des ensembles, c'est-à-dire les axiomes et les notions premières dont l'importance nous a été montrée par les enfants. Dans les livrets à venir nous parlons surtout des

« structures » et de quelques développements qu'on peut faire à partir d'elles.

Détaillons ici les 15 premiers livrets :

— Avec les 5 premiers : *ensembles, algèbre des ensembles, relations, propriété des relations, fonctions*, sont exposées les notions de base dont on peut retrouver pas à pas les genèses chez les enfants de 5 à 10 ans (ce qui bien sûr n'empêche pas des enfants plus âgés de fournir des aspects intéressants dans ce domaine).

— Avec les chapitres 6 à 10 : *cartes perforées, compositions de relations, propriétés des lois de composition interne*, sont réalisées les premières approches des structures. Les travaux des enfants tombent très souvent dans ce secteur très important.

— Avec les chapitres 11 à 15 : *logique, statistiques, probabilités, combinatoire, géométrie*, nous avons exploré des secteurs nouveaux de l'activité des enfants et du langage mathématique. La systématique ensembliste en est parfois absente et sera exposée ultérieurement. Cette série éclaire des ressources très originales des enfants. Si la combinatoire est souvent pratiquée dans nos classes, il n'en est pas de même pour la logique, les statistiques ou la géométrie (topologie surtout) qui gagneront beaucoup à être connues.

Il n'est pas utile de s'appesantir sur chaque livret pris séparément car on trouvera au fil des pages les commentaires qui ont paru s'imposer à ce moment-là. Nous tenons cependant à préciser que la forme donnée à ces livrets justifiait et appelait des limitations. Ainsi, dans la relation des travaux d'enfants, avons-nous souvent abrégé la complexité de la démarche dont nous avons gardé seulement les grandes lignes. Certains travaux à directions multiples pouvaient être décrits à propos de notions très différentes. C'est pourquoi, lorsque nous les avons utilisées dans l'approche d'une certaine notion, nous avons laissé de côté les autres prolongements.

La recherche en classe n'a pas à subir cette limitation pas plus qu'elle ne doit conduire systématiquement à la découverte immédiate de concepts précis et définitifs.

Il y a entre la démarche des enfants (empirisme) et la démarche des mathématiciens (formalisme) une différence de nature que nous voudrions préciser. La mathématique se présente classiquement sous une forme axiomatisée : à partir d'axiomes, choisis non pour leur priorité évidente et immédiate, mais pour leur efficacité (ils permettent des déductions qui ne se contredisent pas entre elles), on a réussi à décrire toutes les mathématiques connues et pénétrer dans un domaine neuf. Le seul mode de raisonnement dans la mathématique axiomatisée, c'est la déduction. On se donne d'un seul coup toute la théorie et on

ordonne ensuite cette immense construction dans un espace fermé qui ne renvoie qu'à lui-même. Tout est là. Comment cela y est-il arrivé ? C'est la question qu'on ne se pose pas, qu'on élude. L'axiome est par définition quelque chose qui ne se discute pas. On admet sa validité universelle. On l'admet parce qu'il est efficace. Mais comment s'est-il imposé ? Cela est hors de question.

Et pourtant la mathématique n'a pas été donnée aux hommes. Une démarche constitutive tâtonnante a été nécessaire à travers les âges pour construire ces mathématiques déductives que nous utilisons aujourd'hui sans référence à leur genèse, ignorée le plus souvent. D'où la tentation d'imposer aux enfants les axiomes et les symboles comme des points de départ alors qu'ils sont l'aboutissement de cette recherche tâtonnée. D'où décalage, ambigüité :

— d'un côté un langage cohérent et entièrement circonscrit dont toute proposition peut être théoriquement obtenue par déduction,

— d'un autre côté des notions surgissant en pleine évidence mais sans liaison avec un langage constitué, relié très fortement à un vécu qui a tendance à se dégager de la subjectivité et à se hisser au niveau de la communication.

La première illusion à dissiper est celle d'un parallélisme entre les deux démarches. Il ne peut y avoir au mieux que des entrecroisements, des rencontres plus ou moins aléatoires. La mathématique a elle aussi sa nécessité interne, mais d'une autre nature que celle de la démarche des enfants. Les axiomes ne sont pas forcément les valeurs simples et universelles qui s'imposent à chacun et il serait vain de chercher dans la mathématique un modèle que l'enfant pourrait suivre docilement. C'est pourquoi il nous faut condamner le projet d'initiation de l'enfant à la mathématique en suivant les axiomes et la voie qu'ils ouvrent. Un tel projet escamote complètement la différence radicale de nature entre les deux progressions, et, de ce fait, impose une contrainte, contrainte idéologique dont on peut facilement démonter le mécanisme.

Un deuxième point sur lequel il faut insister, c'est le fait que les enfants, tout en restant affectivement attachés aux conditions initiales de la recherche peuvent, et c'est en cela que leur attitude a à voir avec les maths, opérer certaines généralisations. Une des premières étapes de la création mathématique est la mise en signe des raisonnements opérés. Alors les signes peuvent vivre d'une vie qui leur est propre et qui appelle des développements spécifiques. On ne peut pas dire que la situation de départ disparaît complètement. Au contraire, une dialectique s'instaure entre les expériences vécues et leur description mathématique. Une fois cette dernière opérée, il s'agit de sortir des limitations qu'elle impose et de les dépasser par un nouvel appel à l'expérience vécue qui proposera d'autres actes et d'autres modèles mathématiques. C'est d'ailleurs à ce moment-là que la mathématique s'imposera comme normative, en se posant comme le lieu de rencontre de situations diverses. Mais aucune généralisation ne se présentera comme norme achevée. Il faut en éprouver la solidité, la mettre en défaut ou la dépasser. C'est pourquoi on peut dire qu'une généralisation pure et simple des concepts mathématiques s'avère prématurée et en avance sur les démarches tâtonnantes.

Nous réaffirmons donc le primat de la recherche et du tâtonnement dans l'appropriation, par les enfants, du langage mathématique (et en extrapolant, par l'adulte aussi). Nous pensons que la meilleure façon de lire ces livrets est de se mettre soi-même en situation de recherche. L'idéal serait même que chacun les récrive pour lui, en partant des travaux des enfants de sa classe. Rappelons le texte que nous mettions déjà en guise de conseils de lecture au dos des pochettes contenant les livrets :

« À travers les comptes rendus que nous présentons ici, nous espérons que vous saisirez, encore plus que l'information mathématique, la ligne pédagogique. »

Considérant cette dernière comme la plus importante, nous avons souvent préféré reporter à la fin les commentaires mathématiques. Certains chapitres de ces commentaires pourront vous apparaître trop délicats, trop théoriques ou même trop abusifs. C'est volontairement que nous les avons maintenus afin que chacun puisse, selon son niveau de connaissance mathématique, son besoin présent, son attrait vers une information plus poussée, trouver ce qu'il désire, ce qu'il peut assimiler à ce moment particulier.

Ces livrets ne sont pas conçus pour être lus en une seule fois. Ils se veulent instrument de travail, à l'usage des camarades qui se posent des questions tant pédagogiques que théoriques dans la suite de leur tâtonnement et de leur prise de conscience du phénomène mathématique. Ne soyez donc pas inquiets si lors de la première lecture, tout ne « passe » pas mais reprenez vos livrets lorsque votre propre recherche, liée à celle de vos élèves, vous aura amené à vous poser de nouvelles questions.

Ces livrets cherchent à vous offrir, grâce aux comptes rendus de travaux vécus, les exemples de ce que peut être une mathématique vivante. Si un vocabulaire et des lois mathématiques s'y trouvent explicités, c'est pour que soient bien sentis les liens étroits qui existent entre des créations abstraites, pensées, construites et des situations de vie, réelles ou imaginaires. Nous soulignons souvent des nuances inhabituellement présentées dans les livres, ceci à la lumière de nos expériences et des difficultés rencontrées par les enfants.

Composés à partir d'expériences généralement indépendantes les unes des autres, ces livrets ne constituent pas un cours. Ils ne suivent donc pas une réelle progression. De ce fait, il n'est pas nécessaire d'avoir assimilé entièrement les informations d'une série pour trouver bénéfique à la lecture des autres ; celles-ci pouvant d'ailleurs vous paraître plus simples si elles se rapportent à des thèmes auxquels vous êtes sensibilisés par votre recherche et celle des enfants. »

Si notre projet pédagogique au niveau de l'éducation mathématique est original par rapport à l'enseignement classique, nous tenons à affirmer l'aspect unitaire de notre pédagogie, que ce soit en sciences, en français, en art enfantin ou en tout autre domaine : respect du tâtonnement expérimental de l'individu et du groupe, prise en compte du vécu de chacun : affectivité, originalité, rythme...

L'attitude d'aide et de catalyseur que cela exige de l'enseignant n'est pas idéologiquement neutre et nous sommes parfaitement conscients de ses présupposés. Si nous nous préoccupons de voir les enfants sous l'éclairage des mathématiques, c'est parce que nous pensons que nous devons favoriser les démarches tendant à rationaliser la complexité des phénomènes. L'engagement idéologique se traduit de façon claire lorsque nous n'essayons pas de faire déborder la recherche du cadre qu'elle s'est fixée pour en tirer une généralisation hâtive qui, elle, témoignerait de notre part, de la recherche d'une élite.

Notre souci est de faire que tous les enfants, chacun avec son affectivité et son discernement propres, s'engagent dans la recherche pour que le milieu qui les entoure devienne plus facilement pénétrable. Il ne s'agit pour nous, ni de lier l'enfant de façon définitive aux systèmes en place par son incapacité à dominer la complexité des choses, ni de l'inhiber et le disqualifier vis-à-vis des « connaissances ».

Jean-Claude POMES
Bernard MONTHUBERT et Jean-Paul BLANC

Note

de B. Monthubert :

IL faut savoir pourquoi la mathématique « moderne » peut apporter quelque chose de neuf dans notre pédagogie.

Si nous avons, bien avant même les nouveaux programmes, engagé les camarades à s'intéresser à la math moderne, c'est en raison de l'élargissement du champ de recherche qu'elle offre, de la liberté d'approche et de création qu'elle propose, de l'unité de pensée au niveau des structures qu'elle réalise, de la libération psychologique face à la Vérité qu'elle engendre chez les individus qui la pratiquent.

Si nous avons défendu avec conviction l'utilité de l'introduction de la math moderne dans l'enseignement élémentaire, c'est donc pour des raisons pédagogiques, bien sûr, mais aussi et surtout pour des raisons humaines et sociales. Nous ne pouvons donc absolument pas être solidaires de la pseudo réforme de l'enseignement mathématique telle qu'on la vit dans la majorité des classes actuellement.

D'abord, nous nous refusons à délaisser le champ d'expérimentation que nous propose la vie pratique, permettant à l'enfant d'être en prise directe sur son vécu de tous les jours.

En effet, sous prétexte d'avoir découvert l'erreur fondamentale que l'on commettait au niveau de la progression et des apprentissages mathématiques, installés en l'absence des concepts de base les plus nécessaires, il est commun actuellement de chercher à faire acquérir ces concepts indépendamment de tous support vécu ou/et réel.

Cette pratique — que nous dénonçons tant au niveau de la forme qu'à celui du contenu — a pour triple effet de refuser à l'enfant handicapé au niveau de l'abstraction — et c'est souvent le cas dans les milieux socialement défavorisés — la possibilité de se

raccrocher à ses expériences pratiques personnelles, de le laisser encore plus désarmé face aux situations réelles de sa vie actuelle ou future et de l'assujettir psychologiquement aux forces sociales du pouvoir et du « savoir ».

Ensuite notre projet de démystification de la mathématique — comme de toute science et tout moyen d'expression — suppose un accès de l'enfant à celle-ci par ses propres créations et expériences, ses propres constructions. On ne peut donc se satisfaire d'exercices proposés par le « Maître », aussi fonctionnels soient-ils.

Enfin il nous est facile de constater à quel point l'acquisition des concepts, lorsqu'elle s'est faite par une construction et des chemins personnels est plus solide et plus efficiente.

Lorsque le maître dans des exercices, tels ceux rencontrés dans la plupart des fichiers proposés par les éditeurs, aura « offert » aux enfants des tableaux cartésiens par exemple, pour représenter des couples vérifiant une relation, il n'est pas douteux que ceux-ci seront capables de nouvelles fois de faire le même exercice — c'est-à-dire remplir des tableaux donnés — et cela peut paraître satisfaisant et suffisant. Mais leur travail ne se sera situé qu'à un seul niveau, celui de savoir si tel couple vérifie ou non la relation. On aura escamoté les étapes, que nous affirmons comme essentielles, de prise de possession d'une situation, de son analyse, de la recherche d'une représentation correspondant à la structure et aux besoins.

Les enfants alors seront le plus souvent incapables, devant une situation nouvelle, d'en analyser la structure suffisamment clairement pour établir les correspondances (les isomorphismes) avec celles du même type déjà rencontrées.

A l'opposé celui qui aura lui-même tâtonné, construit par approches successives un tableau cartésien en aura intégré la structure en même temps que le mécanisme et saura alors de toute évidence non seulement l'utiliser (le choisir comme représentation puis le remplir) mais aussi l'analyser (comprendre son langage).

B.M.

BON DE COMMANDE

M Adresse
..... N° département

demande à la CEL de lui envoyer :

... série 1 à 5 ... série de 6 à 10 ... série de 11 à 15

Ci-joint, règlement : 9 F par série (ou 7,20 F, actionnaire n°)

CCP (3 volets) au nom de CEL — MARSEILLE 115-03 signature
 Chèque bancaire

A retourner à CEL — BP 282 — 06403 CANNES

INDEX DES NOTIONS MATHÉMATIQUES

Le numéro des livrets est indiqué en chiffres romains, celui des pages en chiffres arabes. La définition et la description de certaines notions se poursuivent parfois sur plusieurs pages. Dans ce cas, seule la première page est indiquée.

- A**
 Agrandissement, XV.14
 Algèbre des ensembles, II.1
 Anti-symétrie, IV.14
 Appartenance, I.4 - I.8
 Application, V.4
 — linéaire, V.15
 — réciproque, V.13
 Arbre dichotomique, I.13 - XIII.6
 Arrangement, XIII.9 - XIV.2
 — avec répétition, XIII.9
 Associativité, IX.12
 — de la réunion, X.10
 — de l'intersection, X.11
- B**
 Bijection, V.11
- C**
 Calcul des propositions, XI.3
 Cardinal
 — d'un ensemble, I.9
 — des parties d'un ensemble, XIV.13...
 Carte perforée, VI.1 - VII.1 - XIV.6
 Centre d'homothétie, XV.15
 Classe d'équivalence, IV.12
 Classement, IV.13
 Combinaison, XIII.14 - XIV.5... - XIV.10
 Combinatoire, XIII.1 - XIV.1
 Commutativité, IX.7 - VIII.7
 — de la réunion, VII.9
 — de l'intersection, II.3 - VII.9
 Composition de bijections, VIII.10
 — de fonctions, VIII.10
 — de relations, VIII.1 - VIII.10
 Connecteur logique, XI.1
 Correspondance, III.2
 Couple, III.11
 — de position, XIV.2
 Courbe de Gauss, XII.13
- D**
 Dénombrement, XIII.14
 Diagramme de Carroll, I.11
 — de la réunion, II.10
 — de l'intersection, II.3
 Diagramme cartésien, III.6 - XIII.4 - VIII.8
 Diagramme de Venn, I.11
 — de la réunion, II.10
 — de l'intersection, II.3
 Diagramme sagittal, VI.1 - VIII.7
 Diagramme en bâtons, XII.7
 Différence d'ensembles, II.15
 Différence symétrique, II.15
 Distribution normale, XII.13
 — uniforme, XII.11
 Distributivité, X.14
 Domaine, XV.2
 — simplement connexe, XV.3
 Double-implication, XI.12
- E**
 Echantillon, XII.11
 Effectif, XII.7
 Effectifs cumulés, XII.8
 Égalité de 2 ensembles, I.9
 Élément d'un ensemble, I.4
 — idempotent, X.13
 — involutif, X.13
 — neutre, X.4
 — régulier, X.8
 — permis, X.13
 — simplifiable, X.8
 Élément symétrique, X.6
 — symétrisable, X.7
 Ensemble, I.2
 — de départ, III.9
 — d'arrivée, III.9
 — défini en compréhension, I.4 - I.8
 — défini en extension, I.4 - I.8
 — des couples, IX.5 - XIII.4
 — des parties, I.12
 — ordonné, VI.15
 — vide, I.7
 Entier naturel, X.7
 — rationnel, X.7
 Equiprobabilité, XII.7
 Equivalence logique, XI.11
 — des formules, XI.12
 Et logique, II.11 - XI.4
 Évènement, XII.16
 — certain, XII.15
 — élémentaire, XII.16
 Événements indépendants, XII.16
 Extérieur, XV.2
- F**
 Faux, XI.3
 Figures semblables, XV.15
 Fonction, V.1
 — de répartition, XII.8
 — numérique, V.14
 — réciproque, V.13
 Formule logique, XI.6 - XI.13
 Fréquence, XII.7
 Fréquences cumulées, XII.8
 Frontière, XV.2
- G**
 Géométrie affine, XV.6 - XV.16
 — euclidienne, XV.10 - XV.16
 — projective, XV.13 - XV.16
 Graphe d'une relation, III.9 - XIII.4
- H**
 Histogramme, XII.8
 Homothétie, XV.15
- I**
 Image d'un élément, V.8...
 Implication logique, XI.9
 Inclusion, I.14
 Injection, V.10
 Intérieur, XV.2
 Intersection de 2 ensembles, II.2
 — de plusieurs ensembles, II.6
 Isométrie, XV.12
- L**
 Loi de composition, IX.4
 — interne, IX.5
 Logique, XI.1 - VII.14
- M**
 Machine à transformer, VIII.11
- N**
 Nombre moyen, XII.6
 Nombre rationnel, X.7
 Négation logique, VII.14 - XI.10
- Non, I.6
- O**
 Opération, IX.9
 Ordre, IV.13
 Ordre strict, IV.14 - XIV.3
 — large, IV.15
 Ou logique inclusif, XI.7... - II.11
 — exclusif, XI.8 - XI.13...
 Oui, I.6
- P**
 Paire, I.7
 Partie, I.10
 Partition, IV.10 - VII.7...
 Permutation, XIII.10 - VIII.13
 P.G.D.C., VI.13
 P.P.M.C., VI.13 - VIII.13
 Polygone statistique, XII.7
 Population, XII.7
 Préordre, IV.16
 Probabilité, XII.5 - XII.7
 Produit cartésien, III.12 - XIII.3
 Projection, XV.10
 Proposition logique, XI.3
 Propriétés des lois de composition
 interne, IX.1 - X.1
 Propriétés des relations, IV.1
- R**
 Rangement, IV.13
 Réflexivité, IV.6
 Règle de simplification, X.9
 Relation, III.1
 — à l'intérieur d'un ensemble, III.10
 — complémentaire, III.13
 — d'équivalence, IV.12
 — d'ordre, IV.14
 — réciproque, IV.2 - III.15
 Relations commutables, VIII.16
 Représentation sagittale, III.6
 Réunion d'ensembles, II.10
 Rotation, IX.2...
- S**
 Similitude, XV.14
 Singleton, I.7
 Sous-ensemble
 — défini en compréhension, I.4
 — défini en extension, I.4
 — complémentaire, I.4
 Statistique, XII.1 - XIII.3
 Suite, XIII.9
 Surjection, V.9
 Symétrie, IV.4 - VIII.6
- T**
 Tableau à double entrée, XIII.5
 Tableau cartésien, II.12 - XIII.4 - III.6
 Table de Pythagore, IX.6 - XIII.5
 Table de vérité, XI.5
 Tautologie, XI.14
 Topologie, XV.1
 Transformation topologique, XV.5
 Transitivité, IV.9
 Triplet, IX.15 - XIII.5
- V**
 Valeur moyenne, XII.13
 Vrai, XI.3

Pour toutes questions : renseignements, participation, critique, s'adresser au responsable de la Commission : POMES Jean-Claude, 48, avenue de Langelle, 65 Lourdes.