

# STRUCTURES DE VIE STRUCTURES MATHÉMATIQUES



Livret d'information pour les maîtres

© EDITIONS DE L'ÉCOLE MODERNE FRANÇAISE - COOPÉRATIVE DE L'ENSEIGNEMENT LAIC - 06-CANNES

## ENSEMBLES — SOUS-ENSEMBLES APPARTENANCES — INCLUSION ENSEMBLE DES PARTIES

### Avant-propos

*Ces livrets ne prétendent pas suffire à votre information mathématique. Ils ne vous dispenseront pas de la lecture des livres d'initiation mathématique.*

*Ils ne sont pas non plus des leçons modèles. Ce n'est pas parce que telle notion a été introduite de telle façon que vous devez en faire autant.*

*Ils désirent simplement vous montrer qu'il est possible, à partir de situations familières, concrètes ou abstraites, de permettre aux enfants d'expérimenter, de raisonner, de construire des concepts mathématiques.*

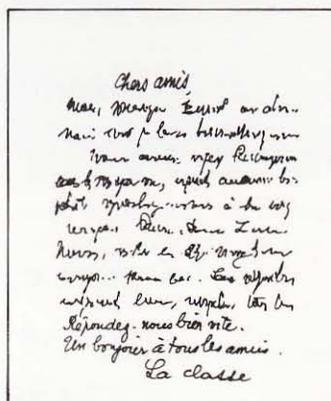
*La vie de tous les jours et l'imagination des enfants nous semblent assez fécondes pour leur permettre une expérimentation d'une richesse inépuisable ; c'est pourquoi nous ne pensons pas que le recours à un matériel et à des jeux artificiels soit indispensable.*

*Le vocabulaire introduit est destiné avant tout au maître qui doit davantage s'efforcer de sensibiliser ses élèves aux concepts mathématiques que de leur apprendre des mots et des définitions qui ne reposeraient pas sur une expérimentation réellement vécue.*

## ENSEMBLES ET ÉLÉMENTS

Tous ensemble, nous venons d'écrire une grande lettre à nos correspondants.

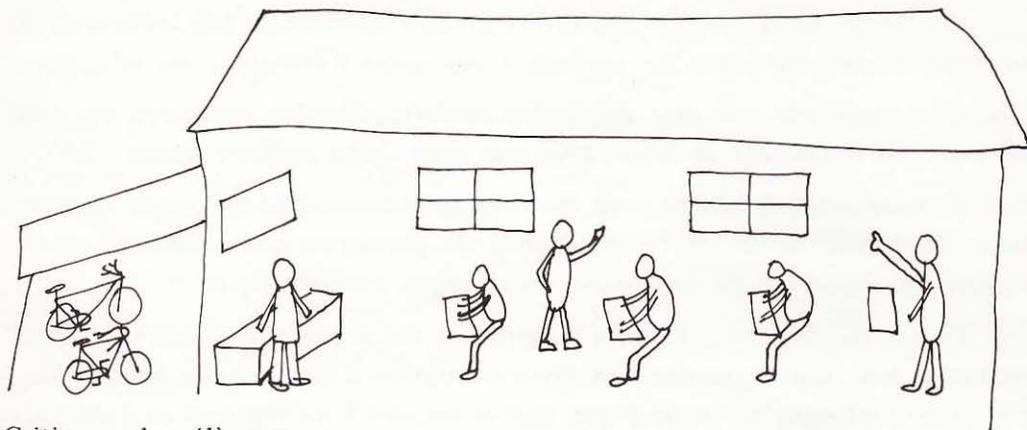
A la fin, Jean-Paul veut signer "La classe"



Jean-Marie s'inquiète :

— *Ce n'est pas la classe qui envoie la lettre ! Ils ne comprendront pas.*

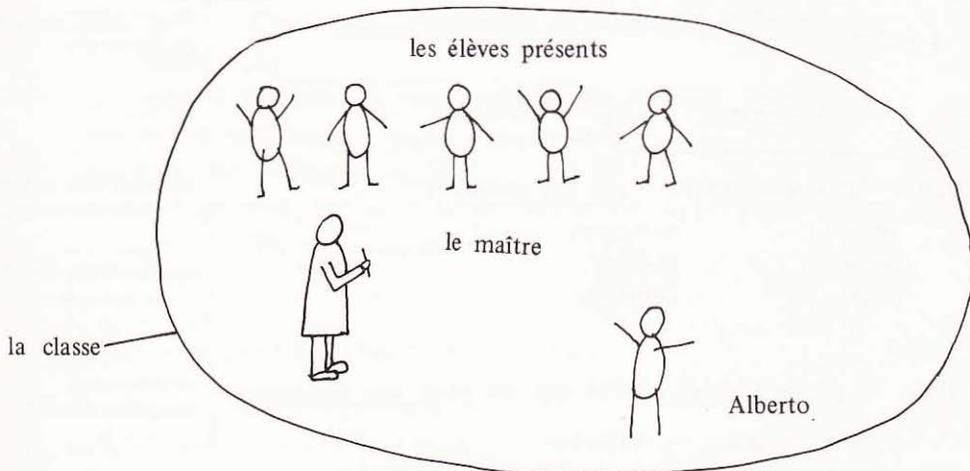
Eric propose de dessiner la classe pour expliquer aux correspondants.



Critiques des élèves :

- *Le préau n'est pas dans la classe. (Eric l'efface)*
- *Les bureaux n'écrivent pas la lettre, il faut les effacer, dit Gilbert.*
- *Nous effaçons aussi les murs, fenêtres, tableaux...*

- Eric – *Alors, il ne reste que les élèves.*
- Jean-Marie – *C'est vrai. La classe, dans ce cas, ce sont tous les élèves qui ont écrit la lettre.*
- Régis – *Et le maître alors ? Il faut l'inscrire.*
- Eric – *Oui, il est dans la classe. Il a écrit la lettre aussi.*
- Philippe – *Alors quand nous signons : la classe, cela veut dire les élèves et le maître.*
- Marc – *Et Alberto qui est malade, il faut le mettre sur le dessin ?*
- Philippe – *Son correspondant ne serait pas content. Il fait partie de notre classe. Il faut le dessiner aussi.*
- Régis – *Il n'a pas écrit, mais ça ne fait rien, il fait partie de la classe aussi.*



- Jean-Marie : *Alors "notre classe" c'est l'ensemble de tous les élèves et le maître.*
- Marc : *Au lieu de dessiner les élèves et le maître on peut faire une liste*

{ le maître , Régis, Marc, Jean-Marie,....., Alberto }

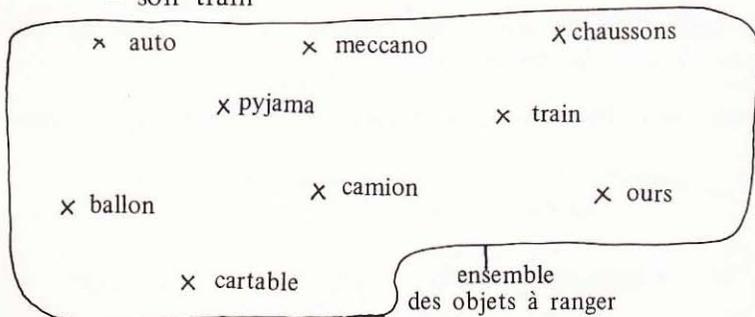
## APPARTENANCE

Maman a dit à Patrick :

Range : les objets en désordre dans ta chambre

Patrick a rangé les objets suivants :

- |                 |                |
|-----------------|----------------|
| – une auto      | – son ballon   |
| – un pyjama     | – un camion    |
| – son meccano   | – un ours      |
| – ses chaussons | – son cartable |
| – son train     |                |



Ensemble défini  
en compréhension

Ensemble défini  
en extension

Chacun des objets  
à ranger  
est un élément  
de l'ensemble

Il a mis dans son coffre tous les jouets :

- |       |         |
|-------|---------|
| auto  | meccano |
| train | ballon  |
| ours  | camion  |

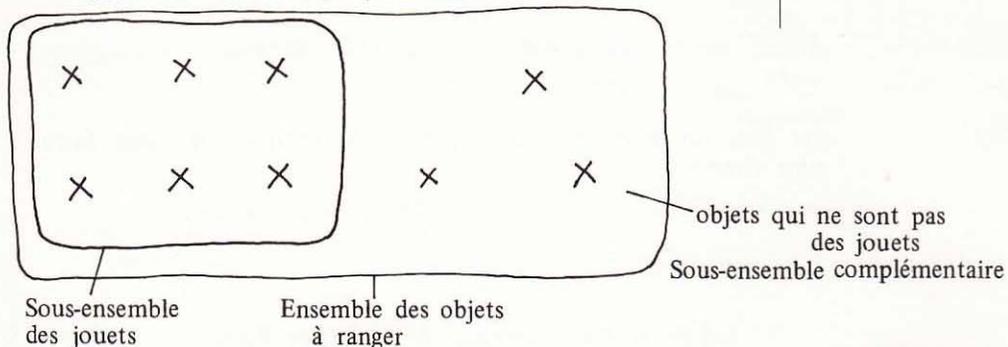
sous-ensemble défini  
en compréhension

sous-ensemble défini  
en extension

Et dans le placard : les objets qui ne sont pas des jouets :

pyjama, chaussons, cartable.

sous-ensemble  
complémentaire



Sous-ensemble  
des jouets

Ensemble des objets  
à ranger

objets qui ne sont pas  
des jouets  
Sous-ensemble complémentaire

## PRÉCISIONS

Le contenu du coffre à jouets ne représente pas toujours l'ensemble des jouets.

En effet, le coffre peut contenir : la clé du meccano, l'oreille de l'ours, la pile de l'auto téléguidée, qui ne sont pas eux-mêmes des jouets.

Ils ne sont pas des éléments de l'ensemble des jouets.

A la question : Cet élément fait-il partie de l'ensemble ?

on doit pouvoir répondre sans hésiter : "oui" ou "non"

Les lunettes de Bernard, les chaussures de Patrick, le bras d'Eric ne font pas partie de l'ensemble des élèves de la classe.

On ne peut définir d'une façon rigoureuse et indiscutable l'ensemble:

- des enfants gentils
- des enfants qui ont les yeux marron, les cheveux blonds...
- des belles gravures
- des jours de beau temps

et en général tout ensemble dont la définition fait appel à une propriété subjective. (Faire l'essai en classe)

*Exemples d'ensembles valables :*

- L'ensemble des pots de peinture.
- La collection de timbres de Claude.
- L'ensemble des livres de la bibliothèque.
- Ensemble des enfants qui mangent à la cantine aujourd'hui.
- L'essaim d'abeilles.
- Ensemble des élèves de la classe, de l'école.
- Ensemble des classes de l'école.
- Ensemble des lettres de l'alphabet français.
- Ensemble des nombres entiers.
- Ensemble des multiples de 3.

## OUI ou NON

Vincent (4 ans) dessine :

– *Je fais l'ensemble des chevaux.* Il trace un trait ferme comme il a vu faire à l'école.

Moi – *Place le cheval de Bernard.*

Vincent trace un point à l'intérieur de la ligne fermée.  
*Que signifie ce point que tu as tracé ?*

Vincent – *C'est le cheval de Bernard.*

Moi – *Place un... hippopotame.* C'est Vincent qui finit ma phrase.  
Il trace un point en dehors de la ligne fermée.

Vincent – *Place une chèvre.* Il pose lui-même la question et place un point dehors.

Moi – *Place le cheval d'un monsieur qui se promène sur son cheval.*  
Vincent place un point dedans.  
*Place le monsieur.*

Vincent – *Ah ! oui, dehors.* Il place un point dehors.

Moi – *Et si tu l'avais placé dedans ?*

Vincent – *Ce serait l'ensemble des chevaux et du monsieur.*

Moi – *Place un grillon.* (Vincent me coupe et veut proposer lui-même)

Vincent – *Place une "estatue"...c'est pas dans le même ensemble.*

Moi – *Place le pied du cheval.*

Vincent – *C'est pas dans le même ensemble.*  
(plaçant un point) *un "esparadrap", du coton... c'est merveilleux.*

Moi – *Place un âne.*

Vincent – *C'est dehors, eh ?*

Je trace un point dehors et je lui demande ce que c'est.  
Il me montre un mot que j'écris, car je note notre discussion,  
puis il ajoute : *C'est peut-être la maison, un bateau à voile, une roue, une pâquerette, de la peinture rouge...*

Moi – *Ça peut être un cheval ?*

Vincent – *oui.*

Moi – *non.*

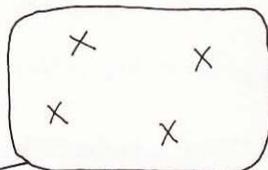
Vincent – *non ? ah ! oui, il serait dans l'ensemble des chevaux.*

## ENSEMBLE VIDE SINGLETON – PAIRE

A la caisse du Supermarché attendent plusieurs ménagères :

\* La maman de Régis a dans son panier :

- une bouteille d'huile
- un rôti
- un paquet de nouilles
- un fromage

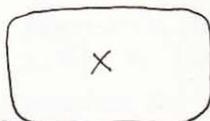


ensemble des marchandises  
achetées par la maman de  
Régis

ensemble  
à plusieurs  
éléments

\* La mère de Paulette a :

- un rôti

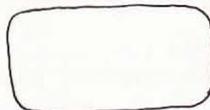


ensemble des marchandises  
achetées par la maman de  
Paulette

ensemble à  
un seul  
élément  
appelé singleton

L'ensemble à deux éléments est appelé paire

\* Moi, dit Régis, maman m'avait demandé d'ache-  
du vinaigre et il n'y en a plus. Mon panier est vide.



ensemble des marchandises  
achetées par Régis

un tel ensemble est  
appelé  
ensemble vide  
et noté  $\emptyset$

Chercher \* l'ensemble des parents d'élèves qui sont :

ouvriers, fonctionnaires, paysans, artisans, ingénieurs...

\* l'ensemble des enfants qui travaillent – à l'atelier de peinture –  
à la céramique – à la couture – à la menuiserie...

Attention :

Ne jamais écrire Didier = {élèves travaillant à l'électricité} même si  
Didier est le seul élément de l'ensemble

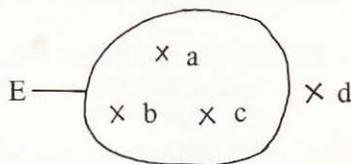
mais on peut écrire {Didier} = {élèves travaillant à l'électricité}

Un ensemble ne peut être égal à l'un de ses éléments

## SYMBOLES ET CONVENTIONS

- \* L'ensemble est en général représenté par une majuscule, l'élément par une minuscule.

$$E = \{a, b, c\}$$



$a \in E$  se lit :

l'élément **a** appartient à l'ensemble **E**

$d \notin E$  se lit :

l'élément **d** n'appartient pas à l'ensemble **E**

- \* L'ordre des éléments n'intervient pas :

$$\{a, b, c\} = \{b, c, a\}$$

Un mot n'est donc pas seulement un ensemble de lettres

$$\{t, i, r, e\} = \{r, i, t, e\} = \{t, r, i, e\} = \{i, t, e, r\} \dots$$

- \* Un ensemble peut être défini :

– **en compréhension** : en énonçant la propriété commune à tous les éléments de l'ensemble et à eux seulement.

ex. :  $\{\text{les nombres pairs compris entre 1 et 11}\}$

– **en extension** : par l'énumération des éléments :

$$\{2, 4, 6, 8, 10\}$$

Définir un ensemble en extension ne présente parfois que peu d'intérêt.  
ex. : un essaim d'abeilles.

– l'ensemble des droites d'un plan est un ensemble infini,

Sa définition en extension est donc impossible.

Par convention, on écrit les éléments entre des accolades

On écrira : (exemple de la page 4)

$$\text{Ensemble des jouets} = \{\text{les jouets}\} = \{\text{auto, train, ...}\}$$

## ÉGALITÉ DE DEUX ENSEMBLES

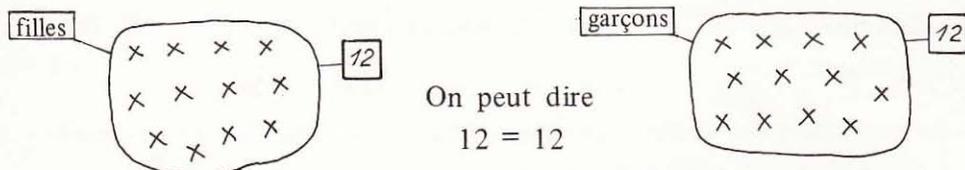
Lucien avait écrit  $12 \text{ filles} = 12 \text{ garçons}$ .

- Ce n'est pas vrai ; si on veut faire un match de foot, il vaut mieux les garçons.
- Mais si Lucien veut distribuer un cahier à chacun, 12 garçons ou 12 filles c'est pareil. Il faut 12 cahiers pour chaque groupe.

Ce n'est pas la propriété *filles* ou *garçon* qui compte dans ce cas-là, c'est le nombre de filles ou de garçons.

12 est le **cardinal** de l'ensemble des filles.

12 est le **cardinal** de l'ensemble des garçons.



Ces deux ensembles ne sont pas égaux, ils sont **équipotents** (cela veut dire qu'ils ont même cardinal, le même nombre d'éléments)

Deux ensembles sont **égaux** quand ils sont formés des **mêmes éléments** (= signifie identique)

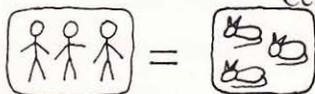
- \* Dans une école de garçons l'ensemble des garçons est égal à l'ensemble des élèves.
- \* L'ensemble des nombres pairs = l'ensemble des multiples de 2 = l'ensemble des nombres terminés par 2, 4, 6, 8 ou 0.

**Attention** \* Si Michel et sa sœur Renée s'occupent tous les deux des 15 lapins de la maison, alors les 15 lapins de Michel = 15 lapins de Renée. Les lapins de Michel et de Renée sont les mêmes, les deux ensembles sont **égaux**.

- \* Si Jacques et sa correspondante Janine élèvent chacun 15 hamsters, les 15 hamsters de Jacques sont différents des 15 hamsters de Janine.

Ces deux ensembles sont **équipotents**

- \* Ne pas écrire



## SOUS-ENSEMBLES OU PARTIES

- *Quels sont les élèves de la classe qui mangent à la cantine aujourd'hui ?*

On dresse la liste :

*Pierre, Jean-Paul, Bernard, Michel... Lucien...*

Dans ce cas-là { les élèves de la classe } est l'univers considéré, et cette liste est un **sous-ensemble** ou **partie** de l'ensemble des élèves de la classe.

- l'ensemble des palourdes est un sous-ensemble de l'ensemble des coquillages.
  - les ensembles des voitures immatriculées 75, 84, 86, 38 sont des sous-ensembles de l'ensemble des voitures immatriculées en France.
- Dans chacun des cas, on a énoncé une propriété et l'on a classé chacun des éléments, dans le sous-ensemble  $A$  s'il présente cette propriété, dans l'ensemble complémentaire noté  $\bar{A}$  s'il ne la présente pas.
- Dans la classe quand on connaît les enfants qui mangent à la cantine, on connaît aussi ceux qui n'y mangent pas.
  - Quand on donne les résultats d'un examen on n'affiche généralement que la liste de ceux qui ont réussi, de même pour le tirage d'une tombola...

Tout participant à un concours dont le nom ne figure pas sur la liste des gagnants sait qu'il appartient au **sous-ensemble complémentaire** dont les éléments ont en commun la propriété (!) "n'a pas gagné au concours".

## REPRÉSENTATIONS

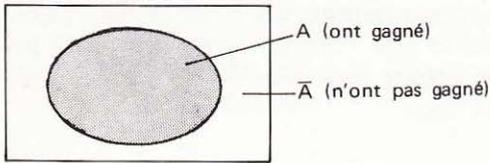


diagramme de Venn

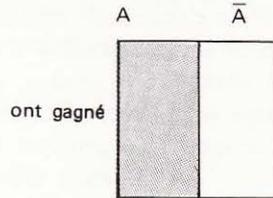
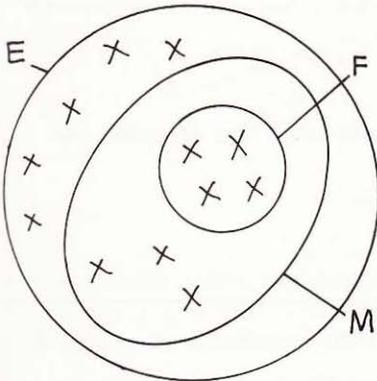


diagramme de Carroll

Le **diagramme de Venn** privilégie l'ensemble A par rapport à l'ensemble complémentaire  $\bar{A}$  qui semble secondaire.

Le **diagramme de Carroll** donne autant d'importance au second qu'au premier.

**Remarque :**



$E = \{ \text{ensemble des élèves de la classe} \}$

$M = \{ \text{ensemble des élèves du cours moyen} \}$

$F = \{ \text{ensemble des filles du cours moyen} \}$

On voit facilement qu'il existe un  $\bar{F}$  dans M et un  $\bar{F}$  dans E, ce n'est pas le même. Dans ce cas le terme  $\bar{F}$  n'est pas assez précis. Il est indispensable alors d'employer le symbole

$\overset{C}{\underset{M}{\cup}} F$  ou  $\overset{C}{\underset{E}{\cup}} F$  : on lit "Complémentaire de F dans M"  
 (on dit aussi : complémentaire de F par rapport à M)  
 "Complémentaire de F dans E"

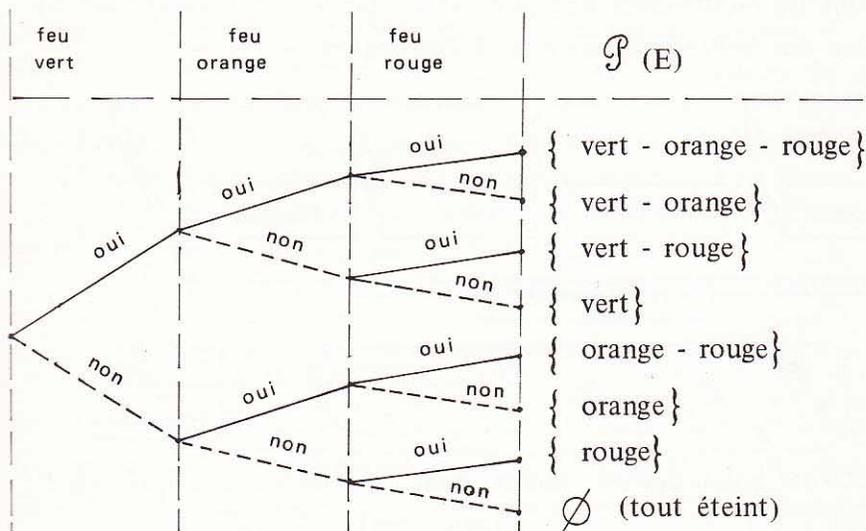
• N'employer  $\bar{F}$  que dans les cas où il n'y a pas de confusion possible quant à l'ensemble de référence.



## REPRÉSENTATION

Pour dresser la liste complète des parties, on peut opérer méthodiquement.  
Pour chaque élément, on répond oui ou non.

Au premier élément deux possibilités  
Au deuxième 2 fois 2, etc...

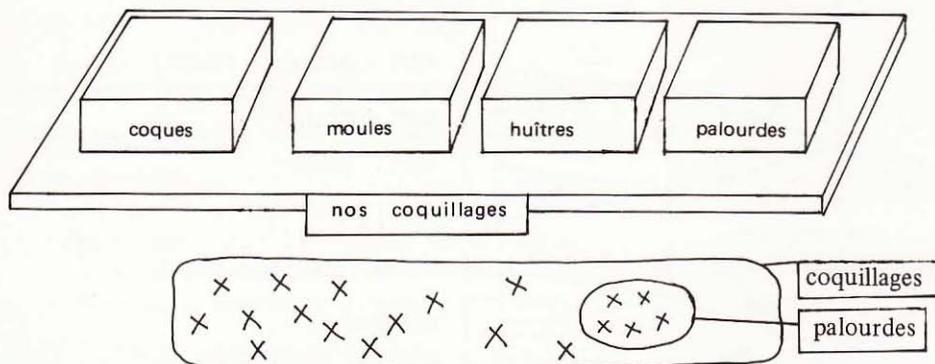


- \* On appelle **arbre dichotomique** cette disposition où chaque branche se divise en 2 branches correspondant aux deux réponses possibles : oui ou non ; donc pour 3 éléments: 8 possibilités ( $2 \times 2 \times 2$ )
- \* Cette disposition est utilisée aussi dans la classification des oiseaux, champignons... On tient compte d'un certain nombre d'éléments : volve, anneaux, lamelles et pour chacun on demande : oui ou non, puis on passe au suivant. On arrive ainsi à une classification de plus en plus fine.
- A la maison, au petit déjeuner avant de partir à l'école ou au travail, Papa déjeune souvent le premier, tout seul ; puis Maman et moi en même temps. Ce n'est pas toujours ainsi... le dimanche nous déjeunons tous les trois ensemble. ...mais il y a d'autres combinaisons, dessine-les.

## L'INCLUSION

Ce matin Pascale a amené des coquillages à l'école. "Ce sont des palourdes, c'est papa qui me l'a dit."

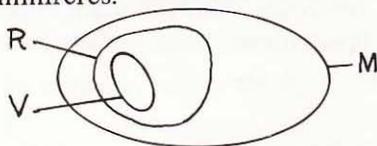
Nous allons les mettre dans une boîte et les ranger sur l'étagère des coquillages, à côté des huîtres, des moules et des coques.



L'ensemble des palourdes est **inclus** dans l'ensemble des coquillages. cela s'écrit ainsi :  $P \subset C$        $\{ \text{palourdes} \} \subset \{ \text{coquillages} \}$

- \* Les vaches sont des ruminants, les ruminants sont des mammifères, donc les vaches sont des mammifères.

$$\left. \begin{array}{l} V \subset R \\ R \subset M \end{array} \right\} \Rightarrow V \subset M$$



- \* Les carrés sont des rectangles aux côtés égaux, les rectangles sont des parallélogrammes aux angles droits, les parallélogrammes sont des trapèzes aux bases égales, donc les carrés sont des trapèzes.

$$C \subset R, R \subset P, P \subset T \Rightarrow C \subset T$$

**Ne pas confondre :** ● L'ensemble des coquillages qui comprend autant d'éléments que de coquillages.

- L'ensemble des catégories de coquillages qui ne comprend ici que 4 éléments :  $\{ \text{palourdes, huîtres, moules, coques} \}$

## EXERCICES

- 1) - Comment diriez-vous ? – Jean et Pierre appartiennent à l'ensemble des élèves de la classe.  
 – ou Jean et Pierre sont inclus dans l'ensemble des élèves de la classe ?

Répondre en utilisant les symboles mathématiques  $\in$  ou  $\subset$

- 2) - Si on écrit { joueurs de basket de l'école } = { joueurs de volley de l'école }  
 que pouvez-vous en conclure ?
- 3) - Représentez par un diagramme de Venn : l'ensemble des mammifères M, l'ensemble des ruminants R, l'ensemble des félins F. Placez les éléments : **s** (une souris), **v** (une vache), **a** (une autruche), **c** (un chat).
- 4) - Soit A l'ensemble des lettres de l'alphabet  
 M l'ensemble des lettres figurant dans le mot "maritime"  
 R l'ensemble des lettres figurant dans le mot "rame"  
 Etablissez les relations d'inclusion qui sont vraies entre A, M, R ;  
 entre A,  $\bar{M}$ ,  $\bar{R}$  en prenant  $\bar{M} = \complement_A^M$        $\bar{R} = \complement_A^R$
- 5) - Définissez en extension l'ensemble des multiples m de 5 tels que :  $8 \mid m \mid 42$
- 6) - Définissez en compréhension { Auriol, Coty, De Gaulle, Pompidou }
- 7) - Dans l'univers des oiseaux, quel est l'ensemble complémentaire de l'ensemble des passereaux **P** ?
- 8) - Dans l'ensemble des élèves de la classe quel est le sous-ensemble complémentaire du sous-ensemble des élèves de moins de 40 kg ?
- 9) - Dans l'ensemble des filles d'une classe, quel est l'ensemble complémentaire du sous-ensemble des filles ?
- 10) - Combien d'éléments dans  $\mathcal{P}(E)$  si E a 4 éléments ?

### Attention

Les erreurs les plus fréquemment commises viennent d'un manque de rigueur dans la définition des propriétés des ensembles.

Ne pas confondre

- L'ensemble des chats des élèves et l'ensemble des élèves qui ont des chats.
- les *blouses bleues* (qui ne sont pas en même temps des blouses jaunes, rouges) et les *blouses qui ont du bleu* et qui peuvent avoir aussi du jaune, du rouge...
- Ceux qui mangent à la cantine aujourd'hui et ceux qui y mangent habituellement.
- Papa sera-t-il facteur et paysan, s'il cultive ses terres après son travail de facteur ?

## Réponses de la page 15

- 1) - On doit dire Jean et Pierre appartiennent à l'ensemble des élèves de la classe  
 $\text{Jean, Pierre} \in \{\text{élèves de la classe}\}$

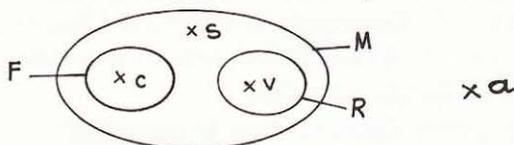
Jean et Pierre sont des éléments de l'ensemble donc ils appartiennent à l'ensemble. Si nous considérons le sous-ensemble constitué par Jean et Pierre, nous pourrions écrire

$$\{\text{Jean, Pierre}\} \subset \{\text{élèves de la classe}\}$$

**Un élément appartient à un ensemble. Un sous-ensemble est inclus dans un ensemble.**

- 2) - Si on écrit  $\{\text{joueurs de basket de l'école}\} = \{\text{joueurs de volley de l'école}\}$  nous pouvons conclure que ce sont les mêmes joueurs qui composent les deux équipes (v. page 9). (= signifie identité)

3)



- 4)  $R \subset M \subset A$  ou  $A \supset M \supset R$   
 $\bar{M} \subset \bar{R} \subset A$   $\supset$  se lit contient

5)  $\{10, 15, 20, 25, 30, 35, 40\}$

6)  $\{\text{présidents de la République Française de 1947 à 1970}\}$

7) -  $P = \{\text{passereaux}\} \Rightarrow \bar{P} = \{\text{oiseaux qui ne sont pas des passereaux}\}$

8) -  $E = \{\text{élèves dont le poids est inférieur à 40 kg}\} \Rightarrow \bar{E} = \{\text{élèves dont le poids est supérieur ou égal à 40 kg}\}$   
 Si l'on écrivait  $> 40$  kg on oublierait les élèves de 40 kg exactement.

9) -  $F = \{\text{ensemble des filles de la classe}\} \Rightarrow \bar{F} = \emptyset$

10) E a 4 éléments ;  $\mathcal{P}(E)$  a 16 éléments  
 $E = \{a, b, c, d\}$  ;  $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$