

Application linéaire

par

Michel PELLISSIER

Si j'apporte de l'eau au petit moulin de Le Bohec, il tournera plus vite. Alors je vais m'y appliquer petit à petit, car il me plaît ce petit moulin là. Pensez-donc : accepter l'événement ! Mais si j'ai commencé par cette idée, c'est aussi parce qu'elle est un exemple de fonction linéaire dont je voudrais parler aujourd'hui.

L'an dernier, pour essayer de mieux tenir le coup devant mon téléviseur aux moments des *Chantiers Mathématiques*, j'avais demandé au CRDP, les livrets qui accompagnent cette émission. (J'avoue tout de suite qu'ils ne m'ont pas empêché de perdre pied aussi vite qu'auparavant...)

J'avais tout de même été intrigué par cette question que posait M. Revuz, ou l'un de ses collaborateurs, dans un de ces livrets : « *En résumé, ne serait-il pas possible et profitable de proposer explicitement aux élèves, dès le cours moyen, le cadre simple et fécond en lequel s'élaborent en fait presque tous les problèmes étudiés : celui de l'application linéaire $x \mapsto kx$? C'est un problème pédagogique crucial que nous posons.* »

Cette question suivait un exposé de cette application linéaire et de ses propriétés que je me suis efforcé de bien assimiler. Puis, comme il semblait que l'on pouvait fonder un grand espoir sur elle, j'ai voulu voir quelle était l'attitude naturelle des enfants à ce sujet, et dans les semaines qui ont suivi, j'ai observé le travail et les réactions des enfants, dans leurs démarches vivantes, à la lumière de cette nouvelle connaissance.

Avec mes CM1, une dizaine de gamins avec des niveaux assez variés, nous travaillions souvent à partir d'histoires chiffrées apportées par les enfants et je vous en livre quelques-unes :

« Pour aller à Bourgoin, mon papa met 10 minutes et il y a 11 km. »

Nous avons pris l'habitude de noter nos renseignements en essayant de leur donner le plus de clarté possible et nous utilisons des tableaux de ce genre :

temps	distance
10 mn	11 km

La flèche, nous ne la mettons pas toujours ; elle signifiait simplement : *Je parcours*, et plus généralement, elle exprimait qu'il existe une relation entre ce temps et cette distance : on les écrit sur la même ligne.

Chaque fois que nous dressions un tel tableau, inévitablement la discussion nous apportait tout de suite des propositions comme celle-ci :

— *M'sieur, si je roule 20 minutes, je ferai 22 km.*

— *Et si je roule 30 minutes, j'en ferai 33 !* »

Etc.

Cette démarche paraît assez naturelle aux enfants et leur plaît : certains continuent le tableau sur dix lignes et plus. Certains font aussi apparaître la multiplication dans les tableaux, ainsi :

temps en mn	distance en km
$\times 2 \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} \times 4$ 40 80	$\times 4 \begin{pmatrix} 11 \\ 22 \end{pmatrix} \times 2$ 44 88
etc	

Je suis donc tenté d'apporter à la question posée une première réponse : les enfants sont naturellement amenés à rencontrer l'application linéaire :

$x \rightarrow f(x) = kx$, dans les problèmes de leur vie et utilisent spontanément une de ses propriétés fondamentales.

Je m'explique : $x \rightarrow f(x) = kx$, cela signifie qu'à partir d'une valeur x , variable, on définit une fonction (ou application) $f(x)$ (lire f de x), telle qu'à chaque valeur de x correspond une valeur de la fonction $f(x)$ toujours obtenue en multipliant x par un nombre k constant.

Dans notre exemple, x est le temps que roule la voiture ; à partir de ce temps, la fonction $f(x)$ est la distance parcourue. Cette distance est bien fonction du temps pendant lequel j'ai roulé : « Plus je roule longtemps et plus je fais de km ». (A condition bien sûr que la vitesse moyenne reste constante.) Cette distance se calcule bien en multipliant le temps par la vitesse. k représente donc la vitesse, ici 1,1 km par minute.

En complétant le tableau spontanément comme je l'ai indiqué, les enfants utilisaient cette propriété fondamentale de l'application linéaire qui s'écrit :

$$f(x) = a f(x)$$

a pouvant être un nombre quelconque. Cette propriété signifie en clair, si a vaut 2 par exemple, que la fonction (la distance) qui correspond à un voyage de 20 minutes (soit 2 fois 10 minutes), est égale à 2 fois la fonction qui correspondait à un voyage de 10 minutes. Cela vous paraît évident, mais n'est pas vrai pour toutes les fonctions existantes. C'est une propriété fondamentale de l'application linéaire et les enfants l'utilisent naturellement.

Maintenant un autre exemple : un matin, deux fillettes qui venaient de rentrer de la récréation, étaient en

train de bobiner sur leur index des brins de laine préparés pour des marionnettes. Et elles comptaient les tours de doigt qu'elles pouvaient faire. Comme elles ne trouvaient pas le même nombre de tours et que je manifestais de l'intérêt pour leur « jeu », la discussion s'est engagée à ce sujet et les enfants m'ont dit très vite à peu près ceci : « Plus on a de laine, (pensez en longueur) plus on fera de tours sur le doigt », et : « Ça dépend de la grosseur du doigt. » Ce qui nous a amenés à faire faire l'expérience par chaque enfant : chacun a coupé plusieurs bouts de laine de longueurs différentes, les a mesurés et bobinés l'un après l'autre sur son index en comptant les tours.

Les premiers résultats communiqués ont été inscrits au tableau :

longueur de laine	nombre de tours sur le doigt
108 cm	22 tours
132 cm	31 tours

et à ce moment là, un petit de 9 ans m'a proposé : « On devrait vérifier si avec 108 cm + 132 cm de laine, on fait bien 22 tours + 31 tours. »

A ce moment, cet enfant utilisait cette deuxième propriété fondamentale de l'application linéaire qui s'écrit :

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Ici, le nombre de tours de doigt est bien fonction de la longueur de laine utilisée. Donc, cette propriété signifie qu'un nombre de tours fonction de la somme de 2 longueurs, est égal à la somme des nombres de tours obtenus séparément avec les 2 longueurs de laine.

$$\text{On a : } f(x) = f(108 \text{ cm}) = 22 \text{ t.}$$

$$f(y) = f(132 \text{ cm}) = 31 \text{ t.}$$

$$\text{et } f(x + y) = 22 \text{ t} + 31 \text{ t.}$$

$$f(240 \text{ cm}) = 53 \text{ t.}$$

En principe, car nous avons eu une erreur d'un peu plus d'un tour à la vérification. Et nous avons d'ailleurs discuté pour savoir d'où venait cette erreur, car les enfants étaient sûrs que ça devait « tomber juste ». Nous avons donc envisagé l'élasticité de la laine, l'irrégularité du doigt, etc.

Voici donc deux exemples, parmi beaucoup d'autres, qui tendraient à montrer que les enfants se servent intuitivement (il est toujours un peu délicat d'employer ce mot, mais il m'en faut un) des propriétés de l'application linéaire. Il serait sans doute souhaitable de recueillir d'autres témoignages et d'obtenir des renseignements plus complets que les miens sur ce que le livret des Chantiers Mathématiques appelait le « cadre simple et fécond de l'application linéaire ». Je voulais simplement, dans un premier temps, apporter un témoignage sur l'attitude des enfants en calcul vivant, où nous nous rendons compte de leur comportement naturel. Il est par ailleurs exact que cette application linéaire sous-tend la quasi-totalité de nos problèmes : si donc nous pouvions concilier l'attitude naturelle des enfants en calcul vivant et les exigences mathématiques de cette application, ce serait très bien. Nous pourrions alors refondre notre cours de calcul en en tenant compte et donner ainsi un mode de raisonnement qui resterait identique dans toutes les situations qui sont de ce ressort.

Par la suite notre travail nous a amenés à résoudre nos problèmes de la façon suivante (avec des enfants plus grands) :

quantités	prix
$\begin{array}{r} \times \frac{120}{28} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 8,40 \\ \times \frac{120}{28} \\ \hline \end{array}$
28 kg	?
120 kg	

Réponse : $8,40 \times \frac{120}{28}$

J'abrège évidemment tout ce qui nous a peu à peu amenés à cette généralisation.

Plus récemment encore nous en sommes arrivés là :

quantités en kg	prix en F
28	8,40
$\times \frac{120}{28}$	$\times \frac{120}{28}$
120	?

Réponse : $120 \times \frac{8,40}{28}$

Nous utilisons alors le « k » de la formule $f(x) = kx$, qui est dans ce cas le prix du kg, et plus généralement la valeur unitaire.

Nous n'avons jamais beaucoup utilisé les graphiques, car l'imprécision du tracé ne permet pas de calcul précis.

Je livre rapidement ces dernières idées comme pistes de recherche et de discussion et je les soumets à la critique.

M. PELLISSIER

POUR VOS CADEAUX DE FIN D'ANNÉE



L'ENFANT ARTISTE

d'Elise Freinet

Elise Freinet a retenu et condensé les divers aspects d'une grande cause : celle de la culture à l'école primaire. Le dessin d'enfant en est l'argument essentiel, celui qui peut le plus aisément être pratiqué, généralisé, dans la grande masse des écoles publiques.

Album de luxe, relié toile, 190 pages.
135 reproductions 20 hors-texte couleur.



DANSES DU HAUT-POITOU

Deux nouveaux disques de danses et de chants, recueillis en Haut-Poitou par un éminent folkloriste. Chaque disque est accompagné d'un livret d'explication complétant les faces d'apprentissage de la danse.

N° 641 - La marchoise (danse expliquée). *En complément* : Quand j'étais chez mon père - Chant de la Mariée - Rossignolet du bois.

N° 642 - Le rat - Le bal déterviré. *En complément* : la danse du cercle.

En vente CEL - BP 282 - 06 Cannes