

Cet article justifie l'envoi aux abonnés à l'Éducateur Second degré du dossier n° 22 intitulé : « Expériences de raisonnement mathématique à l'école maternelle » recueillies par Madeleine Porquet.

*A propos
du livre de Z.-P. DIENES*

ENSEMBLES, NOMBRES ET PUISSANCES

par E. LÉMERY

Dans le monde moderne il nous faut des gens capables de comprendre comment les choses s'accordent, car le monde croît rapidement en complexité et des situations de plus en plus complexes demandent à être accordées.

...Le nombre est un concept très complexe et afin d'apprendre à accorder les concepts qui le composent, il faut d'abord étudier ses composantes... Les nombres sont des propriétés des ensembles...

Ainsi débute ce recueil⁽¹⁾ où le professeur Dienes veut démontrer la nécessité de commencer l'enseignement mathématique dès le plus jeune âge par les ensembles, préalablement à l'étude des nombres : « Les premières expériences des enfants à l'école devraient comprendre des expériences concernant les ensembles ». L'auteur d'ailleurs se préoccupe d'une présentation la plus naturelle de ces premières notions ; aussi, les exemples qu'il cite sont-ils des éléments de la vie de l'enfant. Il propose de « fournir » à ces enfants suffisamment d'expé-

riences créatrices qui donneront naissance à divers concepts mathématiques. Plus loin est faite une assez bonne étude comparative de l'apprentissage symbolique mathématique et de l'apprentissage du langage. En effet, après un certain nombre d'expériences, l'étude de situations d'une variété suffisante — ce qui suppose même de grandes différences entre les divers individus — le système des symboles mathématiques prendra un sens, il sera nécessaire au même titre que le symbolisme du langage pour transmettre, échanger, agir, pour satisfaire à ces besoins profonds.

Un éducateur école moderne reconnaîtra là des idées chères à Freinet : en particulier la sensibilité à l'expérience principe capital qui donne tout son sens au tâtonnement expérimental.

Et nous ne devons pas nous attendre à ce que le système de symboles mathématiques ou logiques fonctionne immédiatement mais au terme d'années d'expériences des situations qui sont symbolisées.

(1) Ensembles, Nombres et Puissances, manuel à l'usage des professeurs par Z.P. Dienes, Ed. O.C.D.L. Projet mathématique du CEPAM.

D'ailleurs Dienes montre comment, *tout naturellement*, pourront naître des symboles : les dessins, ensemble de symboles, seront sans doute les premiers moyens utilisés pour une représentation des ensembles, puis ceux-ci évolueront et, viendront alors des symboles plus abstraits (la représentation de l'ensemble sans ses éléments, par exemple).

Z.P. Dienes aborde ensuite les opérations sur les ensembles. C'est alors une partie plus technique, où il présente dans le détail l'aspect pratique de l'apprentissage de ces notions, propose des procédés. Comment les approcher ? Dans quel ordre ?

Réunions d'ensembles et intersections dont l'étude simultanée est recommandée, sont abordables très tôt, sous la forme de jeux avec des cordes ou avec les « blocs logiques », et l'auteur en donne de nombreux exemples, y compris les cas où interviennent trois ensembles. Il ajoute que la notation de ces opérations pourra assez vite prendre un aspect symbolique, et cette idée est illustrée de « symboles » précis auxquels nous sommes maintenant habitués comme réunion : U , intersection $G \cap F = \dots$

Abordables aussi très tôt les notions d'ensembles complémentaires, d'ensembles-différences et leur notation.

L'auteur insiste sur le fait que ce « calcul » d'ensembles ne doit pas entrer de force dans l'esprit des enfants, l'important étant seulement qu'ils conçoivent l'idée d'ensemble, de relation entre l'élément et l'ensemble, l'idée d'ensemble vide, de réunion, d'intersection, de complément d'ensembles mais il ajoute aussi qu'il ne faut pas non plus frustrer certains esprits. Les notations pourront d'ailleurs varier selon les âges, les stades :

emploi de phrases ou forme verbale habituelle, peut-être parfois préférable, puis à un degré au-dessus le diagramme de Venn, enfin les notations conventionnelles vers lesquelles, par nécessité d'abréger, les enfants tendront, on ne sait d'ailleurs jusqu'à quel point : ce qui ne nous surprendra pas lorsqu'on sait quelles peuvent être les facultés créatrices des enfants. Ainsi, ces opérations sur les ensembles faciliteront l'introduction des opérations arithmétiques.

* * *

Le nombre n'est pas, dit l'auteur dans une seconde partie qu'il présente alors, une chose mais une propriété d'un ensemble auquel il se rapporte, comme l'obscurité de la nuit ou la blondeur de cheveux. Ainsi 3 est la propriété de n'importe quel ensemble de trois éléments.

Pour que cette notion de « propriété-nombre » s'intègre dans l'esprit des enfants, il est nécessaire qu'ils aient de nombreuses expériences — l'auteur dit « jeux » — de *correspondance terme à terme* entre deux ensembles, comme faire correspondre un ensemble de chapeaux à un ensemble d'enfants, exemple qui est alors décrit avec toutes les situations possibles. Dienes emploie alors l'expression « ensembles équivalents » si une telle correspondance existe.

Avant que les enfants se mettent à écrire leurs chiffres, qui sont les symboles des « propriétés-nombres », l'auteur insiste sur la nécessité de nombreuses expériences semblables à ces divers exemples qu'il décrit avec précision, y compris celles qui font intervenir les « blocs logiques », matériel didactique qu'il préconise.

D'autre part, essayer d'établir ces correspondances peut aussi bien conduire à des possibilités d'où l'idée d'égalité des « nombres » (même propriété pour deux « ensembles équivalents ») qu'à des impossibilités, d'où l'idée d'inégalité tout aussi enrichissante.

Chacun de nous sent ici combien ce processus peut être naturel. Ne voyons-nous pas souvent les très jeunes enfants établir ces correspondances lorsqu'ils mettent le couvert, rangent les chaussures, attribuent des instruments aux poupées, etc... et combien de telles expériences doivent être favorisées et développées à l'école maternelle si nous sommes attentifs à toutes ces activités.

A un stade ultérieur, de la réunion d'ensembles dont le nombre est connu, sans éléments communs (intersection vide) et de la recherche de la « propriété-nombre » de l'ensemble ainsi obtenu en établissant une correspondance terme à terme avec les noms de nombres connus (...sept, huit, neuf...) peut naître la notion d'addition. Le symbolisme $5 + 3 = \dots$ viendra plus tard, et encore est-il suggéré de n'utiliser que de petits nombres.

La multiplication pourrait naître à son tour, mais beaucoup plus tard, à partir d'expériences aussi (deux sont décrites), mais ici le concept est plus délicat à cause du multiplicateur qui est la propriété d'un ensemble d'ensembles : il y a là deux univers différents et l'auteur attire l'attention sur cette différence qui existe ici avec l'addition.

* *

Une grande part des mathématiques consiste en l'étude des états, des opé-

rateurs qui changent ces états en d'autres états. L'auteur, dans cette troisième partie, donne divers exemples classiques tels que « ajouter 3... », « prendre 4 fois », qui sont l'addition et la multiplication appliquées à un état originel (ou ensemble originel), mais aussi des exemples d'opérateurs moins classiques tels que : « faire deux pas en avant », « monter sur une chaise », « tourner un interrupteur », etc... Il envisage ensuite les opérateurs inverses en général : ceux capables de rétablir l'état primitif, en distinguant le cas où c'est le même opérateur qui est appliqué : « tourner l'interrupteur » à nouveau éteint, de ceux où il faut changer d'opérateur : « faire deux pas en arrière... », « descendre... »

Ensuite, l'extension de ces expériences (parfois gestuelles, d'où une pratique possible de celles-ci dès l'école maternelle) peut être faite à l'étude des opérations qui rétablissent l'état primitif dans le cas de l'addition et de la soustraction, puis de la multiplication et de la division. Puis viendra alors la recherche de l'opérateur qui a conduit d'un état à un autre, puis celle de l'état primitif si l'on connaît l'état final et l'opérateur, par exemple :

état initial	opérateur	2° état	opérateur	3° état
7	+ 3	...		7

alors les opérateurs pourront ensuite être combinés ; ainsi on peut arriver à des « chaînes » avec plusieurs opérateurs et l'enfant cherchera à les raccourcir

$$10 \mid + 3 \mid 13 \mid - 4 \mid 9 \mid + 2 \mid 11$$

en sautant le second état...

De là à découvrir l'idée d'associativité, puis de commutativité il n'y a qu'un pas, que beaucoup d'enfants franchiront, mais avec des restrictions pour

certaines opérations (certaines soustractions).

Puis pourra s'envisager le cas où il y a succession d'un opérateur et de son inverse, ce qui équivaut à l'application de l'élément neutre : cette compréhension en profondeur peut être favorisée par l'étude d'autres états et opérateurs comme : «deux pas en avant», «deux pas en arrière», «rester sans bouger» étant ici l'opérateur neutre.

Nous ne doutons pas, avec l'auteur, de l'importance de ces propriétés qui, dit-il, devront être rendues explicites dans les expériences des enfants, mais les professeurs décideront du moment où ces enfants seront prêts pour ce genre de compréhension analytique.

Quant à nous, nous pensons que les situations où l'enfant peut faire ces expériences, qui pourraient se symboliser par : 1^{er} état, opérateur, 2^e état ou 1^{er} opérateur, 2^e opérateur, opérateur équivalent (comme «avancer de 2 pas», «reculer d'un pas» équivaut à «avancer d'un pas») doivent être assez nombreuses naturellement dans toutes les actions de la vie ; qu'il nous suffise de laisser entrer cette vie dans la classe pour aider ensuite l'enfant à prendre conscience et expliciter ces idées après lui avoir permis de tâtonner jusqu'à la maturation nécessaire.

Dans notre civilisation occidentale, pour que les échanges concernant les nombres soient possibles, un code permet la transmission. Ce code consiste en un système que l'auteur appelle «numération de position» où la valeur de chaque symbole dépend non seulement de sa forme mais de sa position : «valeur positionnelle» (lois de la numération).

Celle-ci résulte de la notion de puissance, et cette notion de puissance correspond au «partage des ensembles en ensembles comprenant chacun le même nombre d'éléments, lesquels sont partagés en ensembles de nombre égal, ainsi de suite»... (64 serait partagé en 8 ensembles de 8 éléments, ou 4 ensembles de 4 sous-ensembles de 4 éléments). Pour nous, en système décimal, cette valeur positionnelle est basée sur des groupes dont le nombre d'éléments est toujours une puissance de la base 10 (nous groupons par dizaine, puis centaine...)

Aussi est-il important que cette idée mathématique de «puissance» s'introduise préalablement à la notation des grands nombres. Et l'auteur propose alors de procéder, il dit «jouer», à des groupements, (objets usuels, enfants eux-mêmes, etc...), mais, ajoute-t-il, que l'enfant ait des expériences nombreuses, variées dans des bases différentes (grouper par 2, 3 ou 4...) affectées d'exposants différents (3 groupes de 3, ceci correspond à l'exposant 2, et ils forment un nouveau groupe). Dienes montre ainsi comment, techniquement, on peut écrire et compter en système binaire, puis ensuite ternaire...

A l'aide des divers groupements de petits objets réalisés par les enfants on arrivera à la notation exponentielle (l'exposant étant la seconde variable contenue dans la notion de puissance).

Lorsque seront construits des «groupements» divers selon les puissances d'un «nombre de base» différent, cette notation exponentielle serait un palier permettant le passage facile aux multiplications de puissances telles que : $a^2 \times a^3 = a^5$, et plus généralement $b^m \times b^n = b^{m+n}$.

Alors apparaîtront des lois constantes indépendantes du nombre de base et

du groupement envisagé : les lois des exposants.

L'auteur donne de nombreux exemples qui illustrent le processus naturel ainsi envisagé. Mais il met encore en garde contre une symbolisation prématurée ou excessive qui risque de provoquer des blocages et de conduire l'enfant à apprendre par cœur certaines réponses toutes faites. L'enfant qui aura « joué » au « jeu des exposants », sera à l'aise pour s'exprimer dans les différentes bases de numération y compris, naturellement la base 10. Les lois précédentes générales seront alors appliquées à ces cas particuliers. Les exemples nombreux sont là pour montrer aux professeurs *les raisons* pour lesquelles « la compréhension des propriétés des puissances est nécessaire dès les premiers stades pour saisir tous les processus possibles à un stade ultérieur ».

* * *

En conclusion, dans ce recueil spécial à l'usage des professeurs, Z.P. Dienes, dont nous connaissons déjà un certain nombre de publications récentes à l'OCDL(1), démontre, à l'aide de nombreux exemples, très détaillés — mais qui ne doivent pas devenir des sujets de travail pour les enfants — la nécessité qu'il y a à se préoccuper d'abord de faire naître dans l'esprit de nos enfants, dès le plus jeune âge, par des « jeux appropriés », les idées importantes d'ensembles, d'opérations sur les ensembles, de correspondance entre ensembles préalablement à l'étude des nombres et opérations arithmétiques, puis, à un stade ultérieur les notions d'états, de changement d'état, d'opérateurs et de puissance.

(1) Voir les articles de Freinet à ce propos dans *L'Educateur* n° 1 du 15 Oct. 65 et du n° 3 du 1 Nov. 65.

Et nous avons senti dans cet ouvrage combien l'Ecole maternelle, comme nous la concevons, peut fournir justement ce milieu riche où l'enfant pourrait faire ces premières et nombreuses expériences. Mais aussi combien une pédagogie, libératrice comme la nôtre, basée sur le tâtonnement expérimental tout au long du développement de cet enfant, s'accorde parfaitement avec ces principes et peut répondre aux soucis majeurs de l'auteur. A la recherche du processus le plus naturel il insiste fréquemment sur la nécessité de permettre aux enfants suffisamment d'expériences créatrices avant d'explicitier les différents concepts mathématiques et de symboliser. N'est-ce pas là le rôle de notre atelier-calcul, de nos recherches de mathématique vivante à un stade ultérieur? Nous retrouvons là des idées fondamentales semblables à celles qui guident nos recherches actuelles.

Nous ne serons pas toujours en accord avec l'auteur sur l'emploi de moyens plutôt artificiels et il nous est sans doute possible d'en découvrir, dans la vie de l'enfant, dans ses intérêts, dans ses besoins de créer, de plus naturels que nous saurons exploiter.

Ouvrage d'une didactique nouvelle fondée plus sur les « structures » que sur les « nombres », il doit intéresser particulièrement les camarades d'Ecole maternelle. Ceux aussi qui enseignent dans les classes de cinquième du premier cycle ainsi que tous ceux, et nous en sommes, qui sont soucieux d'une véritable formation mathématique. Nous pensons que celle-ci doit commencer très tôt, se poursuivre aux divers degrés de l'enseignement dans un même sens par une permanente « imprégnation » faite de nombreuses expériences, favorable à une compréhension profonde des concepts futurs.

E. LEMERY