

Les mathématiques modernes

dans l'enseignement primaire

II

par
C. Freinet

Sur ces bases de tâtonnement expérimental (1), nous pourrions alors établir une pratique effectivement valable. Mais au préalable, nous croyons utile de faire le point sur deux questions controversées :

- le problème de l'abstraction
- et celui des symboles.

(1) Voir *L'Éducateur* n° 1 du 1^{er} octobre 1965 aux pages 27 à 31.

L'ABSTRACTION

La théorie des ensembles n'est pas plus une nouveauté effective que la méthode de lecture ou de sciences. C'est la pédagogie traditionnelle qui en a envahi abusivement le champ pour y faire pousser à la place ses méthodes artificielles préfabriquées, comme dans ces terrains où les alluvions ont recouvert depuis deux mille ans et plus des villages entiers que les fouilles remettent maintenant à jour. Oui, il faut que des hommes de génie découvrent aujourd'hui, sous les huées des scolastiques, ce que le bon sens nous permet de constater tous les jours.

« Le nombre est une abstraction... les nombres n'ont pas d'existence réelle... Les nombres sont des propriétés... En fait, un, deux, trois n'existent pas dans la réalité. Ce sont des abstractions ».

Ce sont non seulement des abstractions, mais ce sont en même temps des dénominations d'ensembles. Deux, trois, indiquent nécessairement des ensembles. C'est si simple qu'on ne comprend même pas pourquoi il serait utile de le noter. Il faut vraiment que les scolastiques aient la vue et l'ouïe obstruées pour qu'on doive leur rappeler, leur révéler, leur enseigner des choses aussi naturelles que de dire que nous avons deux mains et dix doigts.

« Les nombres sont des propriétés des ensembles ».

Comment pourrait-il en être autrement ?

« L'univers auquel s'appliquent ces propriétés est constitué par des ensembles ».

Compter par ensembles ! Voilà une vérité qui bouleverse toute la pédagogie. Dans un milieu où l'on a si

péniblement habitué les vivants à marcher sur leurs mains, voilà que des iconoclastes viennent révéler : vous pouvez marcher sur vos pieds ! Mais seuls les fous en font l'essai. Les autres, l'ensemble des personnes sages, continueront à marcher sur les mains.

Mais les bergers, depuis toujours, comptent par ensembles. Ils ne comptent jamais leurs bêtes une à une. Réalisez le temps qu'il y faudrait lorsqu'ils ont, éparpillé sur les Alpagnes, un troupeau de 2 à 3 000 brebis ! Ils ne réalisent que par ensembles : le nombre total de bêtes (approximatif, mais on sait que dans ce domaine l'approximation peut être étonnamment totale) ; dans ce total, des sous-ensembles d'animaux appartenant à un autre propriétaire :

des mâles et des femelles ;
des blancs et des noirs ;
des malades et des bien-portants ;
des tondus et des pas tondus ;
des marqués et des non-marqués ;
des gras et des maigres ;
ceux qui seront vendus et ceux qu'on gardera.

Ce berger ne compte vraiment que par ensembles puisqu'il ne sait parfois pas faire une opération sur des chiffres — ce qui ne l'empêche pas de compter à une unité près.

C'est tout simplement la scolastique qui, pour apparemment simplifier — et contrôler — a substitué de bonne heure, dès la plus tendre enfance, les nombres aux réalités qu'ils expriment. Et cette déformation est intervenue du fait de la grosse erreur scientifique du début du siècle : n'est recommandable à l'École que ce qui produit des résultats facilement mesurables, qu'on peut donc cataloguer progressifs et scientifiques, les examens ne contrôlant eux-mêmes que ce qui est mesurable. Cette « imprégnation » en calcul, cette notion plus ou moins

diffuse des ensembles, cela ne se contrôle pas facilement, et c'est pourquoi les vraies mathématiques modernes, dont notre calcul vivant est la base, seront si longues à s'implanter dans les classes, ou bien elles s'y planteront, mais en sacrifiant exagérément aux formules et aux symboles qui risquent fort d'être étudiés en soi, dans l'esprit des anciennes mathématiques, sans cette formation nouvelle qui leur donnerait valeur éducative et portée.

Faut-il partir du concret pour aller vers l'abstrait, ou, inversement commencer par l'abstrait dans lequel le concret est naturellement encastré ?

« Les concepts abstraits doivent être formés par les enfants eux-mêmes, à partir d'un grand nombre de situations concrètes... »

...Pour susciter la formation d'une abstraction, il faut manipuler plusieurs réalisations concrètes de cette structure, en faisant varier toutes les variables correspondant aux divers caractères particuliers, de façon à ce que seuls les caractères communs soient retenus dans le processus d'abstraction, comme propriétés de la structure abstraite ».

LES SYMBOLES

Reste le problème des symboles qui est évidemment une des caractéristiques, un des outils les plus originaux des mathématiques.

Là, les opinions restent partagées : nos explications devraient en hiérarchiser les fonctions : les symboles doivent-ils être appris tout au début des mathématiques, comme signes de l'indispensable abstraction, même s'ils ne signifient rien — ce qui semble parfois être une qualité de l'abstraction ? Ou faut-il partir des éléments que ces symboles représentent ?

Dienes — et nous sommes de son avis — est catégorique.

Nous avons déjà cité cette opinion :

« Dans la grande majorité des cas, quand les étudiants écrivent ou prononcent des signes mathématiques, ils ne veulent exprimer rien d'autre que les signes eux-mêmes, et non pas les structures dont ces signes devraient servir de symboles. »

La fonction psychologique de la démarche analytique comme de la démarche pratique consiste à amarrer solidement la nouvelle découverte à sa place dans la panoplie de nos concepts, de manière à pouvoir retrouver le concept adéquat au moment opportun », ce qui est du plus pur Tâtonnement Expérimental.

« Si un enfant demande : « Faut-il faire une addition ou une soustraction ? » il est clair que cette mise en place n'a pas été réalisée, très probablement parce qu'on a sacrifié les premières phases du cycle dont nous parlons. »

... Cette question des symboles n'est pas simple. Certains faits donnent à penser qu'il vaut mieux introduire les symboles après l'accomplissement de la découverte, car, dans certains cas, l'introduction prématurée des symboles semble paralyser le processus d'abstraction. Dans d'autres cas, en revanche, on a trouvé que l'emploi des symboles accélérât l'apparition des découvertes. Cependant on peut affirmer à coup sûr que, dans nos classes, nous abusons grossièrement des symboles. Une série d'expériences bien enchaînées, suivie de l'introduction de symboles, est certainement plus efficace que des efforts continuels pour associer les symboles à leur « signification ». On apprend beaucoup plus avec une série d'événements qu'avec une série d'explications ».

LA TECHNIQUE D'APPRENTISSAGE

Dans la pratique donc, comment abor-

derons-nous les mathématiques modernes? Là encore nous nous associons à la préoccupation du Pr Dienes :

« L'état actuel de l'enseignement mathématique est tellement défectueux qu'il est urgent de mettre à la portée des instituteurs un ensemble de suggestions aussi cohérent que possible ».

« Il faut beaucoup d'audace pour se demander comment on apprend la mathématique. En faut-il tout autant pour s'interroger sur le « comment » de n'importe quel apprentissage aussitôt que l'on s'écarte du schéma Stimulus-Réponse? ».

Essayons cependant puisqu'aussi bien nous avons eu l'audace de présenter une nouvelle technique d'apprentissage par tâtonnement expérimental.

D'après tout ce que nous avons dit en accord avec la pensée et l'expérience de Dienes, les mathématiques modernes sont, au premier degré surtout (mais nous sommes persuadés qu'il en est ainsi à tous les degrés, avec des variantes technologiques) à base d'expériences, d'exploration, d'information, d'observation, d'enquêtes et de classification.

Mais une telle méthode est-elle possible dans nos classes? Elle l'est, ou du moins peut le devenir rapidement par le *Calcul Vivant* tel que nous l'avons enseigné et tel qu'il se pratique déjà dans des milliers de classes, depuis surtout qu'il est facilité et rendu pratique par les bandes enseignantes. Le Pr Dienes ne connaît pas ces possibilités, c'est pourquoi il reste sceptique sur la réalisation dans les classes primaires d'une méthode dont il sent pourtant la nécessité.

« La vie civilisée nécessite certaines techniques que l'on n'acquiert pas dans le cours normal des événements. Il faut donc que celles-ci soient enseignées à ceux qui en ont besoin. La transmission des techniques manuelles de père en fils »

peut être encore considérée comme un processus relativement naturel, en ce sens que l'initiation du père n'est qu'un aspect de l'adaptation spontanée de l'enfant à son milieu familial. Le processus d'acquisition a été quelque peu stéréotypé, mais conservé dans ce qu'il a de fondamental, dans le système de l'apprentissage artisanal ; il s'agit en quelque sorte, d'un processus d'imprégnation, dont les apprentis ont à peine conscience. Les institutions où l'apprentissage est devenu le plus artificiel sont les écoles... On néglige sérieusement l'étude du processus d'acquisition lui-même. Il n'y a jamais eu, dans aucun pays, un programme systématique de recherches. Nous avons à peine attaqué superficiellement le problème en procédant à des études de pédagogie comparée et à des analyses simplifiées du processus d'acquisition en laboratoire. Mais ces méthodes n'apportent aucune lumière sur le mécanisme du processus d'acquisition ; les études sur les réactions des rats dans des labyrinthes, comme sur les êtres humains apprenant des syllabes sans signification, ou des caractères chinois artificiels, ont probablement peu de chances de s'appliquer à l'apprentissage infiniment plus complexe, et à la situation sociale plus complexe encore, que l'on rencontre dans les écoles réelles ».

Que faudrait-il pour réaliser cette nouvelle technique par calcul vivant et tâtonnement expérimental ?

« La compréhension mathématique universelle peut s'obtenir à condition d'y mettre le prix. Quel est ce prix ? C'est une grande quantité de matériel didactique ».

Que sera ce matériel didactique ? Là est le point délicat.

Dienes, pensant aux écoles de villes, a réalisé un matériel de démonstration et d'expériences en matière plastique qui est en vente chez l'éditeur du livre.

Bien employé, dans l'esprit qui est celui de l'auteur, ce matériel pourrait peut-être rendre de grands services. Mais nous craignons fort que la plupart du temps ce matériel soit employé dans l'esprit école traditionnelle et que, remplaçant l'expérience véritable, il nous reconduise dans l'impasse des symboles qui passent avant l'expérience.

Pour pallier ce danger, nous préconisons :

— *La pratique du calcul vivant* qui permet de partir vraiment des réalités de la vie et du milieu de l'enfant.

Nous avons sur ce thème une expérience considérable dont la publication fera comprendre la valeur pédagogique.

— *Les bandes enseignantes* : mais le calcul vivant s'intègre difficilement dans la pratique courante d'une classe, sauf pour les petites classes. Il demande trop d'improvisation.

Les bandes nous apportent une nouvelle possibilité.

— Les enfants font dans leur milieu la riche quête des éléments du calcul. Au lieu de les travailler sur le champ, nous préparons le soir, ou les jours qui suivent, les bandes de travail correspondantes, en rapport d'ailleurs avec les divers centres d'intérêt et les programmes.

Jusqu'à ce jour, le calcul vivant restait une technique délicate à employer, difficile à intégrer à la vie de la classe, et de ce fait recommandable seulement aux petites classes qui travaillent sans programme fixe, ou aux instituteurs chevronnés. Avec les bandes, il fait partie désormais de la technique normale d'une classe.

LE LABORATOIRE DE CALCUL

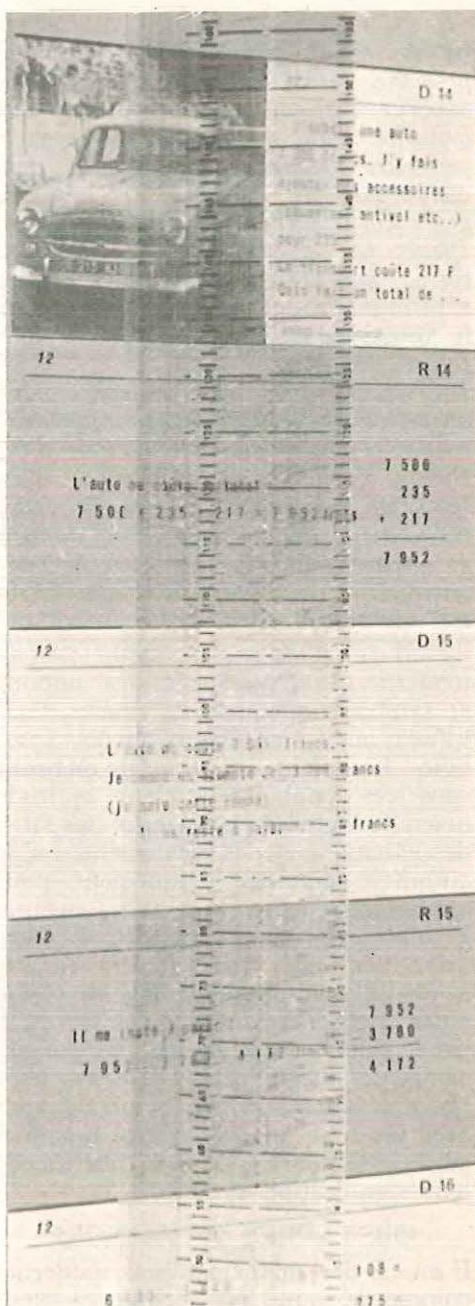
Mais évidemment si les mathématiques modernes sont à base d'expériences, il faut que les enfants aient la possibilité technique de faire de nombreuses expériences. « Cela implique, écrit M. Lerner (article cité), que la classe devienne un Atelier Mathématique, où les enfants travaillent en groupes de quatre à des niveaux différents selon leur rythme propre, et que l'on cesse par exemple de s'inquiéter de ces différences de niveaux qui ne sont que des différences provisoires dans le rythme d'acquisition dues aux différences d'aptitude des enfants. A la fin, chacun d'eux aura appris le maximum qu'il peut appréhender dans le temps scolaire imparti, maximum bien plus élevé — qu'on se rassure — que celui qu'il apprend avec le rythme uniforme des méthodes traditionnelles ».

Or, ce laboratoire — ou atelier — de calcul, nous l'avons réalisé pratiquement avec notre série de 30 bandes-atelier de calcul, qui permettent aux classes, à tous les cours, un travail expérimental qui est éminemment profitable et formatif.

LA MATHÉMATIQUE MODERNE
AU 2^d DEGRÉ

Evidemment, nous avons abordé surtout ici les bases du nouvel enseignement par une méthode que Dienes appelle *Méthode d'exploration abstraite*, et qui est tout simplement, nous l'avons vu, notre méthode de *Tâtonnement expérimental*, plus complète et plus logique.

Les principes valables au premier degré le sont évidemment aux autres degrés, avec évidemment des variations technologiques selon les niveaux.



Bande programmée d'IBM
sur une bande enseignante

« L'expérience montre, écrit M. Lerner (revue citée) qu'au niveau de notre première, grâce à cette méthode, la majorité des enfants aura atteint une maturité mathématique suffisante pour permettre l'étude des groupes, des isomorphismes, des anneaux, des algèbres, des racines et des logarithmes. Certes, Dienes ne conseille pas d'enseigner si tôt ce qui précède, mais il a montré expérimentalement qu'il est possible de le faire avec des sujets normaux et sans fatigue ni ennui.

Les relations que nous manions quotidiennement ne sont pas d'une complexité beaucoup plus grande ; les relations d'inclusion d'identité, de disjonction, d'intersection complétées par les propriétés caractéristiques de chaque classe, suffisent en général pour nous permettre de maîtriser la plupart des situations de la vie courante ».

Le difficile n'est pas, en mathématique moderne, le maniement des notions et symboles auxquels les jeunes s'habituent aussi bien qu'aux anciens symboles. L'essentiel est ce qu'ils mettront sous ces symboles et leur aptitude nouvelle à prendre conscience des faits, des situations et des événements qu'ils auront à combiner logiquement, pour apprendre d'abord, pour créer ensuite. Il n'est même pas interdit, à notre avis, d'entraîner très vite les enfants à jongler avec ces symboles, en pleine abstraction, à condition cependant que, par le calcul vivant, ils aient pris conscience de la signification de ces symboles, tout comme l'enfant pourra jongler avec les mots et les phrases quand il aura pris conscience des réalités de leur signification vivante.

OBSTACLES A VAINCRE

Il en est des mathématiques modernes comme de toutes nos techniques : leur introduction dans nos classes serait naturelle et simple si nous avions

affaire à des élèves, et surtout à des instituteurs neufs, non déformés par la scolastique.

Le risque est grand de voir les éducateurs qui pour diverses raisons, se lancent dans les nouvelles techniques, le faire dans l'esprit de l'ancienne école, ce qui en fausse évidemment le mécanisme.

« Dès lors que nous trouvons d'autres règles qui nous servent mieux, il n'y a qu'à modifier les règles, écrit Dienes ». C'est ce qui se produit lorsqu'on propose une nouvelle théorie. Cette manière révolutionnaire de penser pourrait se rencontrer plus souvent chez les adultes, si les enfants étaient entraînés à se montrer plus audacieux... Et c'est parce que les éducateurs ont été intoxiqués depuis l'enfance qu'il faudrait commencer la réforme par le commencement.

« Il faudrait tout d'abord, conclut Lerner, que les maîtres du premier cycle aient la possibilité de se recycler. Trop souvent, ils n'ont pas eu, au cours de leur formation, la possibilité d'apprendre suffisamment de mathématiques pour comprendre vraiment ce qu'ils enseignent. Les Instructions Officielles de 1945 ne les y aident pas qui déclarent par exemple que les nombres sont concrets jusqu'à 1 000 et abstraits au-delà ».

Terminons comme le fait Lerner, en « souhaitant que ces méthodes se répandent peu à peu en épanouissant non seulement les enfants, mais aussi les maîtres, dans la joie de comprendre, de joindre à tout moment la théorie à la pratique dans la maîtrise de notre environnement ».

Et c'est pour nous enfin un soulagement que de sentir à quels points nos principes théoriques et pratiques peuvent désormais influencer tout l'apprentissage, y compris celui des *Mathématiques Modernes*.

C. FREINET