Les dossiers pédagogiques

l'éducateur

ICEM · FIMEM

Pédagogie Freinet

62-63

PREMIERS PAS VERS UNE MATHÉMATIQUE NATURELLE AU C.P.

PAR J.-J. DUMORA ET LA COMMISSION MATHÉMATIQUE

SUPPLÉMENT
au numéro 6 du
1er Décembre 1970

SOMMAIRE

PREMIERS PAS VERS UNE
MATHÉMATIQUE NATURELLE
AU C.P.

Les nouvelles instructions officielles tout en n'étant que transitoires vont permettre aux maîtres, de CP en particulier, de se libérer des mécanismes et de tenir compte avant tout de l'intelligence et du raisonnement logique de leurs élèves.

Tout en ne faisant pas appel explicitement à la théorie des ensembles, ce programme qui semble assez réduit à première vue, doit nous permettre d'aborder largement dès le CP tout l'éventail des notions mathématiques de base. Il faut que, dès le plus jeune âge, l'enfant puisse développer son raisonnement et son pouvoir de création.

Pour aider les camarades à prendre conscience des domaines que l'enfant du CP peut aborder (nous ne disons pas connaître), nous avons construit un organigramme qui ne prétend pas être un modèle complet à suivre aveuglément. Nous avons mis l'accent, non sur les notions mathématiques abordées, mais sur les relations qui existent entre elles. Cet organigramme peut se lire dans le sens vertical, mais aussi dans le sens horizontal. Nous avons essayé aussi de démystifier certains termes mathématiques par des exemples pris dans nos classes, mais il serait dangereux de penser qu'avec des situations identiques, nous avons pu aborder toutes les pistes indiquées. Les exemples choisis sont des synthèses de notre travail et non des genèses issues d'une seule classe.

Au cours de l'année et *avec votre participation* nous comptons publier des comptes rendus d'expériences où apparaîtraient à la fois, le tâtonnement expérimental de l'enfant, et la part du maître.

Nous espérons que ce document vous aidera à démarrer ou à préciser votre pensée, qu'il vous avertira des points critiques où vous devrez veiller très attentivement à ce que votre participation ne brime pas le cheminement de l'enfant.

Pour que ce document réponde au but fixé il faut des expériences.

Nous n'avons pas de règles à donner ; cependant nous estimons que nos principes pédagogiques : tâtonnement expérimental, méthode naturelle doivent nous guider, et nous éviter de provoquer des bloquages.

L'enfant est dans la vie et tout naturellement il cherche à comprendre. Pour cela il isole des faits de sa propre vie, il cherche les liens entre les éléments, il établit des relations.

Progressivement il va construire un système d'abstractions, il formera des structures et par tâtonnement, il constatera qu'il peut comprendre des situations plus générales.

Partant de la vie, il y revient constamment pour contrôler ses découvertes. Il les testera un grand nombre de fois sous la forme des expériences les plus diverses. Ainsi il y a préparation, mais préparation seulement, à des acquisitions de notions mathématiques qui ne seront effectuées que plus tard.

En effet une notion mathématique est une abstraction complexe qui est la résultante à la fois d'un travail de recherche et d'un phénomène d'imprégnation dans l'esprit de chaque enfant.

Le fait de manipuler des cubes ou tout autre type de matériel... ne saurait constituer une preuve de l'acquisition de notion mathématique.

De nombreuses expériences avec le matériel amènent souvent l'établissement chez la majorité de nos enfants de mécanismes dans lesquels ils s'enferment.

Notre pensée se trouve exprimée par ces propos recueillis au stage du Sud-Ouest : « *Quand j'ai voulu l'aider à comprendre, il s'est arrêté.* »

* *Points critiques de l'organigramme* où nous devons être attentifs aux démarches des enfants et à notre part du maître :

— toutes les symbolisations
  diverses écritures, les représentations

— la notion d'ensemble

— la correspondance terme à terme

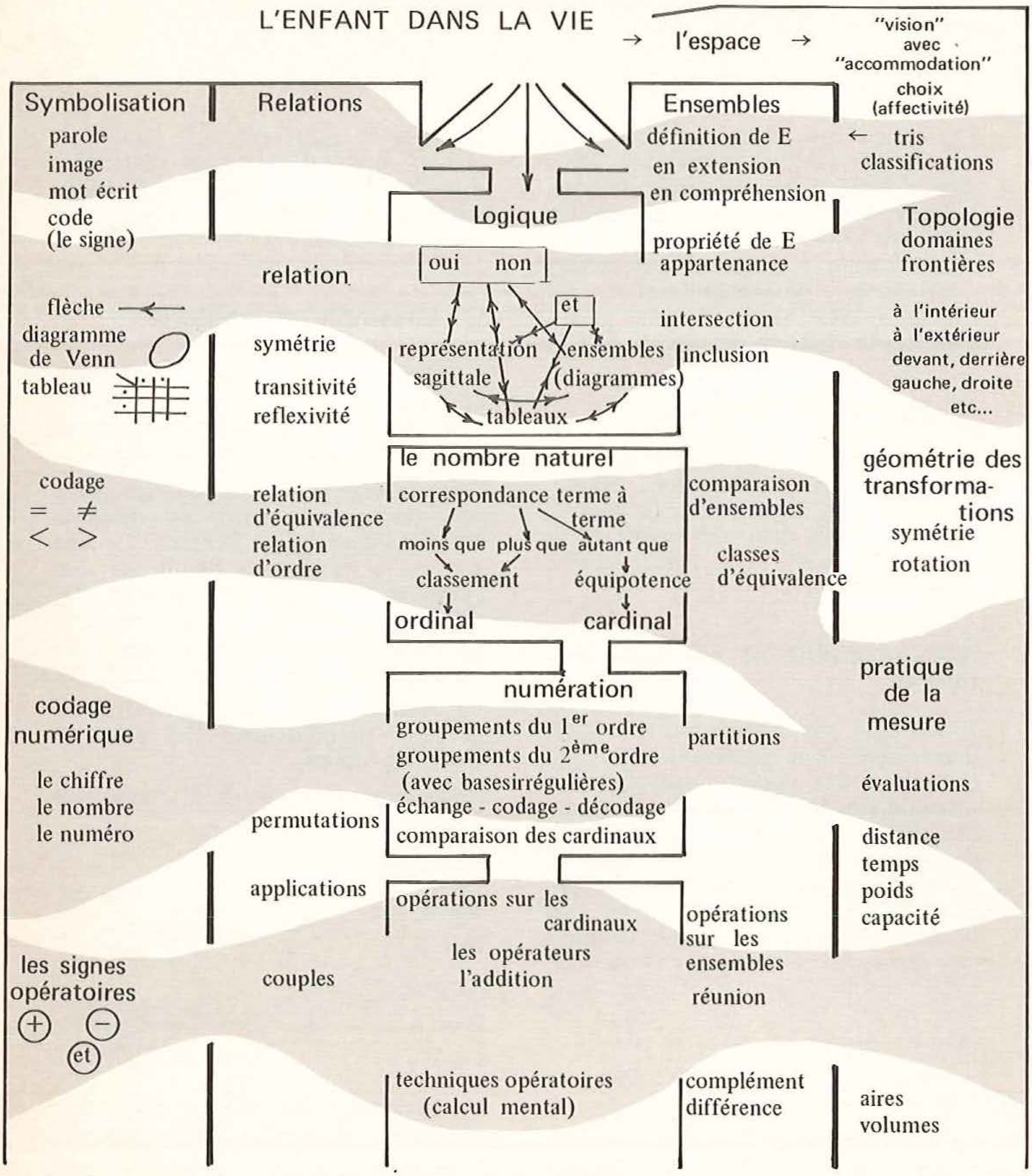
— les bases

— les systèmes de numération

— les techniques opératoires diverses et naturelles

— les transformations géométriques et leurs compositions

— la pratique de la mesure


L'ENFANT DANS LA VIE
→ l'espace →
"vision" avec "accommodation"
choix (affectivité)
Symbolisation
parole
image
mot écrit
code
(le signe)
flèche
diagramme de Venn
tableau
codage
= ≠
< >
codage numérique
le chiffre
le nombre
le numéro
les signes opératoires
+ −
et
Relations
relation
symétrie
transitivité
reflexivité
relation d'équivalence
relation d'ordre
permutations
applications
couples
Logique
oui non
et
représentation sagittale
ensembles (diagrammes)
tableaux
le nombre naturel
correspondance terme à terme
moins que
plus que
autant que
classement
équipotence
ordinal
cardinal
numération
groupements du 1er ordre
groupements du 2ème ordre
(avec basesirrégulières)
échange - codage - décodage
comparaison des cardinaux
opérations sur les cardinaux
les opérateurs
l'addition
techniques opératoires
(calcul mental)
Ensembles
définition de E
en extension
en compréhension
propriété de E
appartenance
intersection
inclusion
comparaison d'ensembles
classes d'équivalence
partitions
opérations sur les ensembles
réunion
complément
différence
← tris
classifications
Topologie
domaines
frontières
à l'intérieur
à l'extérieur
devant, derrière
gauche, droite
etc...
géométrie des transformations
symétrie
rotation
pratique de la mesure
évaluations
distance
temps
poids
capacité
aires
volumes

I ENSEMBLES

Les notions évoquées dans cette partie sont depuis quelque temps vulgarisées dans tous les livres de math, nous ne jugeons donc pas nécessaire de les expliquer encore une fois. Pour plus d'information se reporter aux livrets « Structures Mathématiques », les exemples cités étant souvent puisés dans des documents provenant du CP.

A) La notion d'ensemble

Il ne faut pas s'imaginer que la notion d'ensemble est une notion simple, implicitement acquise dès le démarrage. Il serait bon de savoir dans quelle mesure elle vient naturellement aux enfants.

B) L'ensemble et ses représentations

Il ne faut pas confondre la notion d'ensemble et la représentation d'un ensemble. Les enfants peuvent faire mécaniquement de splendides diagrammes (l'exercice ou la fiche préfabriqués ne pouvant mener qu'à une solution pré-résolue) sans savoir vraiment que constituer un ensemble, ce n'est pas dessiner une « patate » et mettre quelque chose dedans, mais que l'ensemble existe avant d'être représenté, sous une forme réelle, qu'il faudra en prendre possession pour le définir :

— soit en nommant les éléments *(ensemble en extension)*,

— soit en en déterminant la propriété et les limites *(ensemble en compréhension)*,

avant de le représenter (il serait tellement préférable là aussi d'attendre que l'enfant le représente à sa façon avant de lui proposer les représentations en vigueur !)

C) Ensemble et relation

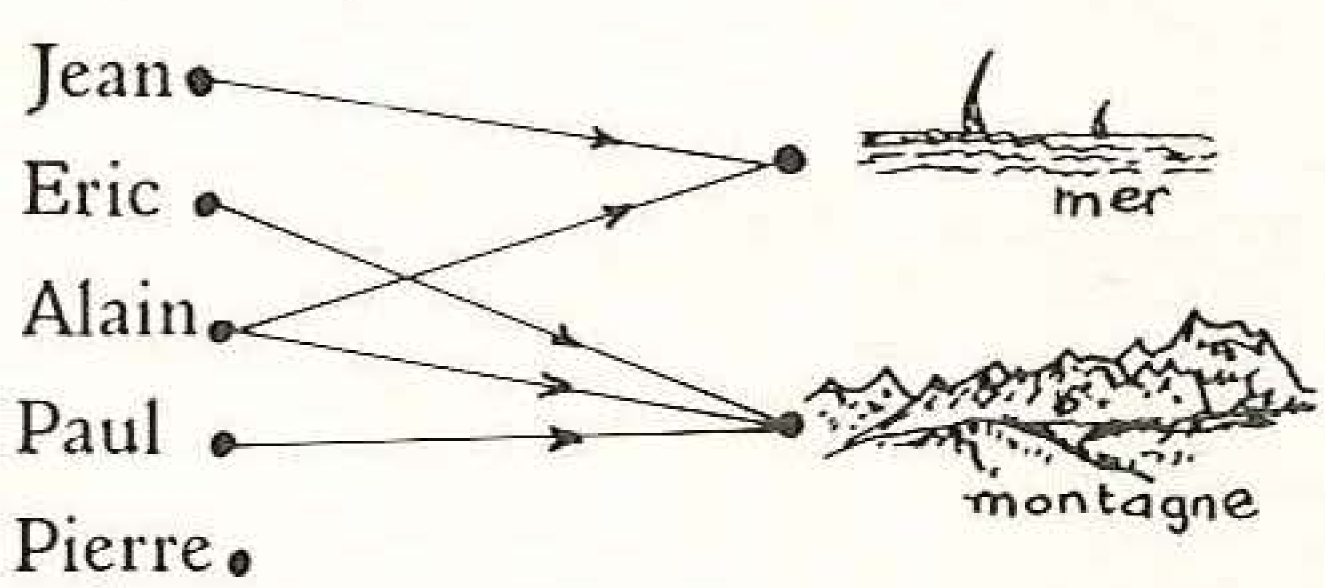
Ce n'est qu'après un long tâtonnement et l'expérimentation de ses découvertes que l'enfant peut dégager les notions d'éléments, d'appartenance.

C'est en établissant dès son plus jeune âge, des relations entre les objets de son voisinage, que l'enfant arrivera à trier, à classer, à définir ce qui l'entoure. Que fait d'ailleurs la mathématique actuelle sinon, comme le dit Papy : « *s'intéresser plus aux relations entre les objets qu'à leur nature* »?

La notion d'ensemble semble donc découler naturellement des relations entre les objets.

Cette notion est souvent considérée comme un résultat.

Par exemple :



En regardant cette représentation sagittale les enfants interprètent et disent :

* Jean et Alain sont allés à la mer. (notion d'ensemble)

* Eric, Alain et Paul sont allés à la montagne. (notion d'ensemble)

* Pierre n'est pas allé à la mer, n'est pas allé à la montagne. (appartenance et non appartenance)

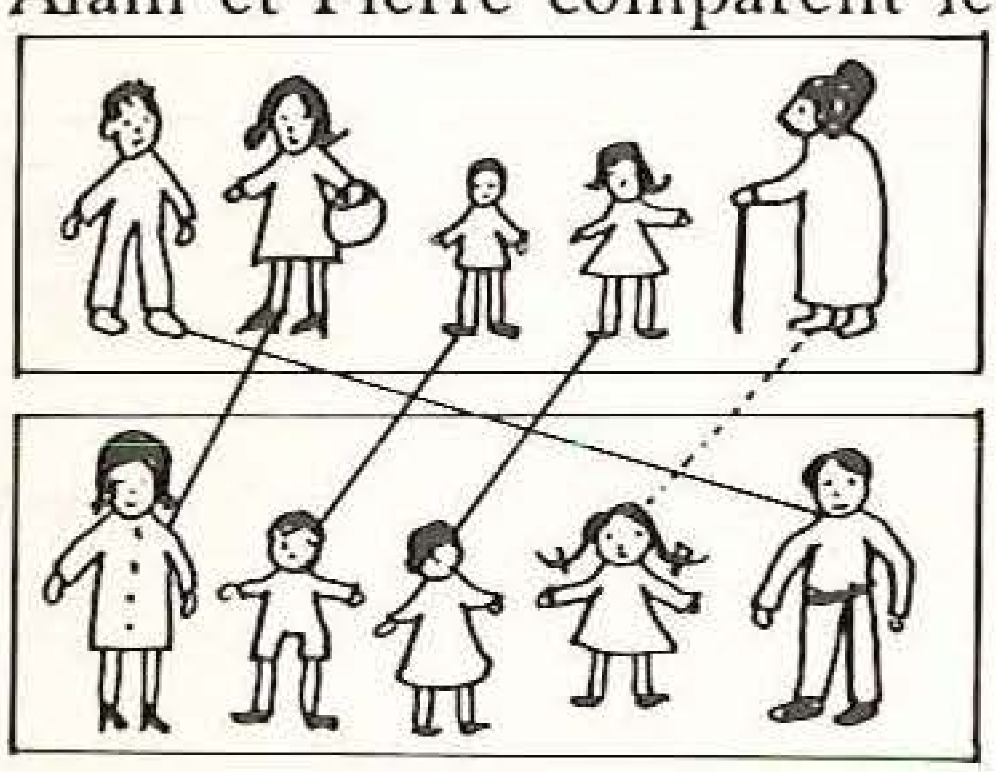
* Alain lui est allé à la montagne *et* à la mer. (vers la notion d'intersection).

Jean dit : Je suis allé à la mer Méditerranée mais la mer Méditerranée c'est la mer ! (vers l'inclusion)

Les notions abordées ici sont directement liées aux notions de topologie (voisinage, domaines, frontières...)

D) Comparaison d'ensembles

Dans la classe, chaque enfant a dessiné sa famille pour son correspondant. Alain et Pierre comparent leur famille



famille de Pierre

famille d'Alain

Alain dit : *Tu as un papa, moi aussi* par le geste puis par un trait. Alain relie son papa à celui de Pierre ; de même la maman de Pierre va avec la maman d'Alain, la sœur d'Alain avec la sœur de Pierre, Alain avec Pierre.

(C'est une correspondance terme à terme mais elle est sélective.)

Faire correspondre la mémé de Pierre avec la sœur d'Alain serait un peu la preuve que les enfants ont bien compris la notion d'ensemble.

Bien des tâtonnements auront précédé cette réalisation.

Un enfant habitué à avoir affaire à des ensembles d'objets identiques comme c'est souvent le cas dans les fiches (rappelez-vous : on ne mélange pas les torchons avec les serviettes) ne fera pas cette correspondance-là.

Il faut avoir découvert ce qu'est un élément d'un ensemble :

a) qu'il est un ;

b) qu'il peut être interchangeable avec n'importe quel élément de l'ensemble ;

c) qu'il n'y a que la propriété commune qui importe (s'il y en a une, même).

Nous avons l'impression que l'on passe souvent trop rapidement et comme une évidence sur cette notion : la correspondance terme à terme ne doit pas être un truc, une mécanique à comparer les ensembles, elle doit être motivée et ressentie. Sinon toute la découverte du nombre ne sera que le maniement d'un procédé, prétendu nouveau, menant à une connaissance artificielle du nombre.

Dire que pour aller au nombre il suffit :

— de faire des ensembles ;

— de les comparer en faisant la correspondance terme à terme ;

— de ranger ceux qui sont équipotents ;

— d'établir un ensemble référence ;

— et de dire que tous les ensembles équipotents avec l'ensemble référence ont le même cardinal, c'est imposer aux enfants un cheminement qui n'est peut-être pas le seul à envisager ; on risque surtout d'aller trop vite, d'en faire un système rigide. Le plus important n'est pas d'arriver rapidement au nombre mais que chaque enfant trouve sa route pour y arriver.

Il faut laisser démêler l'écheveau et ne pas avoir peur de perdre du temps en risquant de faire de nouveaux nœuds.

Ce n'est pas la connaissance du nombre qui compte mais sa création.

STRUCTURES DE VIE
STRUCTURES MATHÉMATIQUES

livrets d'information pour les maîtres

Ces livrets ne prétendent pas suffire à votre information mathématique. Ils ne vous dispenseront pas de la lecture des livres d'initiation mathématique.

Ils ne sont pas non plus des leçons modèles. Ce n'est pas parce que telle notion a été introduite de telle façon que vous devez en faire autant.

Ils désirent simplement vous montrer qu'il est possible, à partir de situations familières, concrètes ou abstraites, de permettre aux enfants d'expérimenter, de raisonner, de construire des concepts mathématiques.

La vie de tous les jours et l'imagination des enfants nous semblent assez fécondes pour leur permettre une expérimentation d'une richesse inépuisable ; c'est pourquoi nous ne pensons pas que le recours à un matériel et à des jeux artificiels soit indispensable.

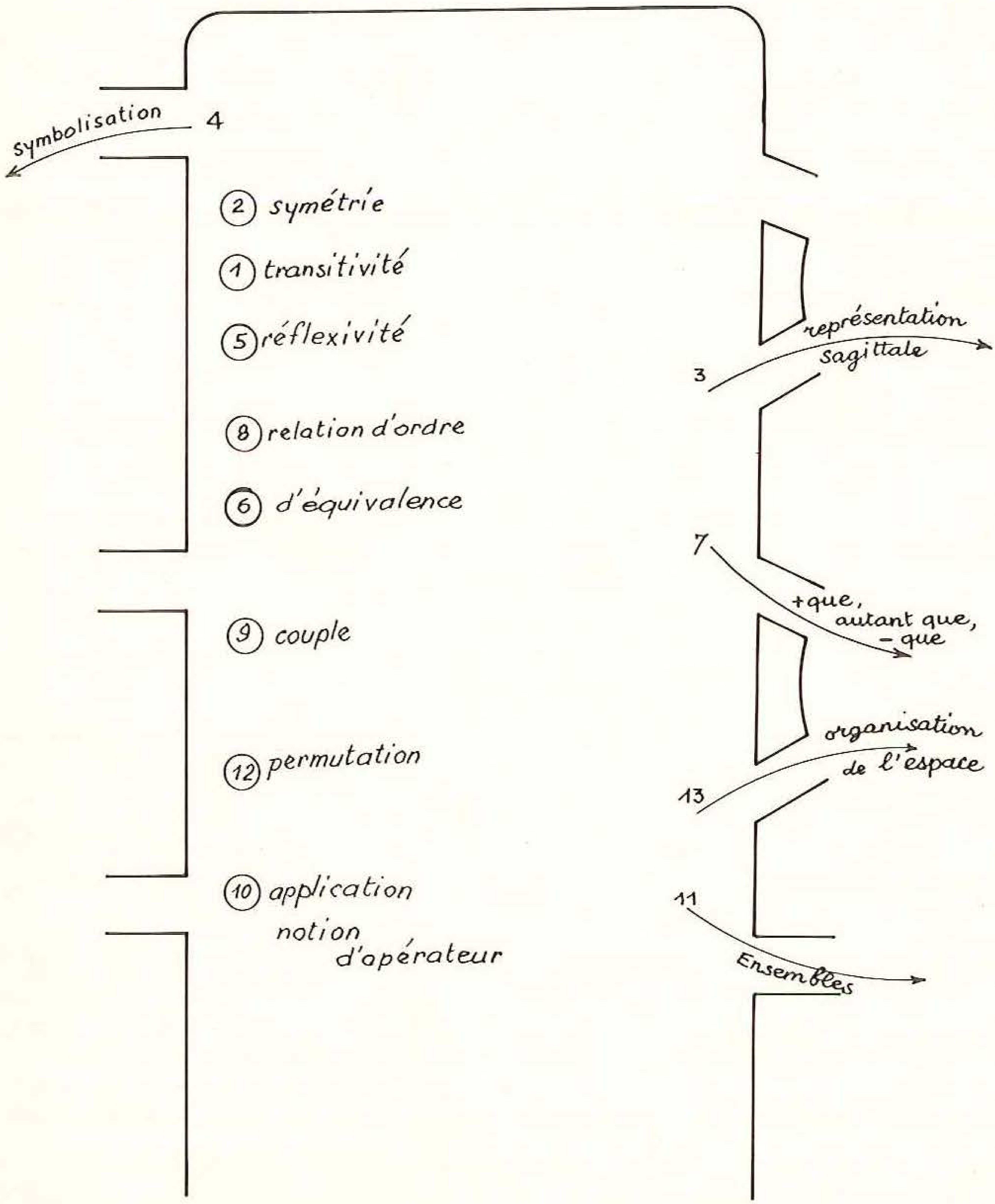
Le vocabulaire introduit est destiné avant tout au maître qui doit davantage s'efforcer de sensibiliser ses élèves aux concepts mathématiques que de leur apprendre des mots et des définitions qui ne reposeraient pas sur une expérimentation réellement vécue.

Ces livrets de 16 pages paraissent par séries de 5 à partir de la rentrée 1970.
1re *série (no 1 à 5) :* 1) Les ensembles - 2) Algèbre des ensembles - 3) Les relations 4) Propriétés des relations - 5) Fonctions et applications.
2e *série (no 6 à 10) :* Lois de composition - Structures, groupes - Isomorphismes - Transformation du plan - Dénombrements.

Tous autres renseignements : CEL - BP 282 - 06 - CANNES

II RELATIONS

A) Types de relation



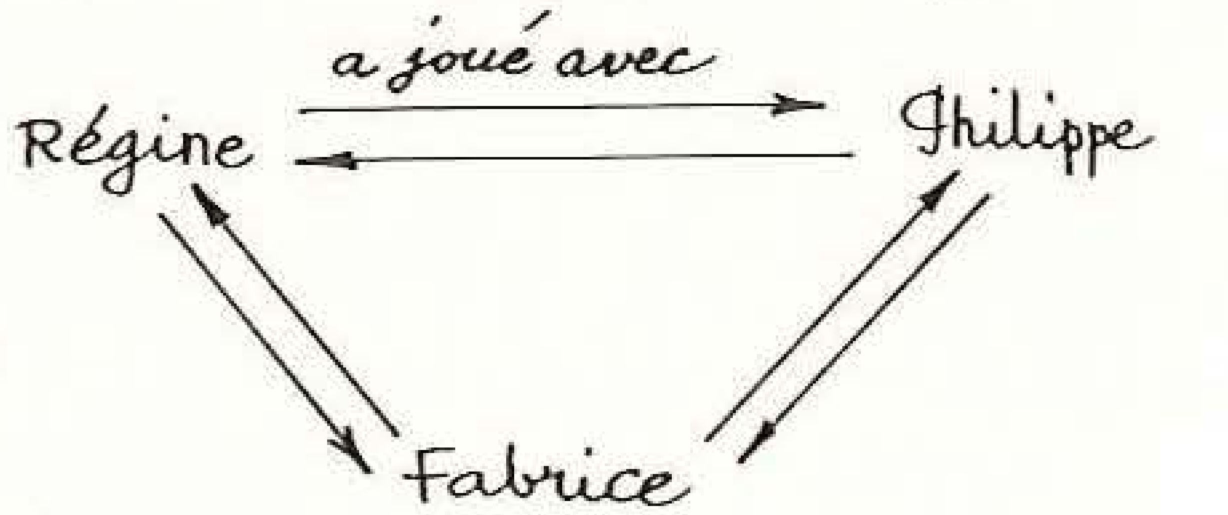
B) Relation d'équivalence

En récréation :

« *Régis joue toujours tout seul, il ne veut pas jouer avec moi,* » se plaint Régine en rentrant de récréation.
— *Avec qui as-tu joué alors ?*
— *Avec Philippe ; on descendait le toboggan à plat-ventre.*
— *Moi aussi j'étais avec Philippe,* dit Fabrice, *alors tu jouais avec moi aussi* (transitivité) (1).
— *Non! je ne jouais pas avec toi,* dit Régine.
— *Si, Régine jouait avec Fabrice puisque Fabrice jouait avec elle* (symétrie) (2).

On représente :

représentation sagittale : (3)

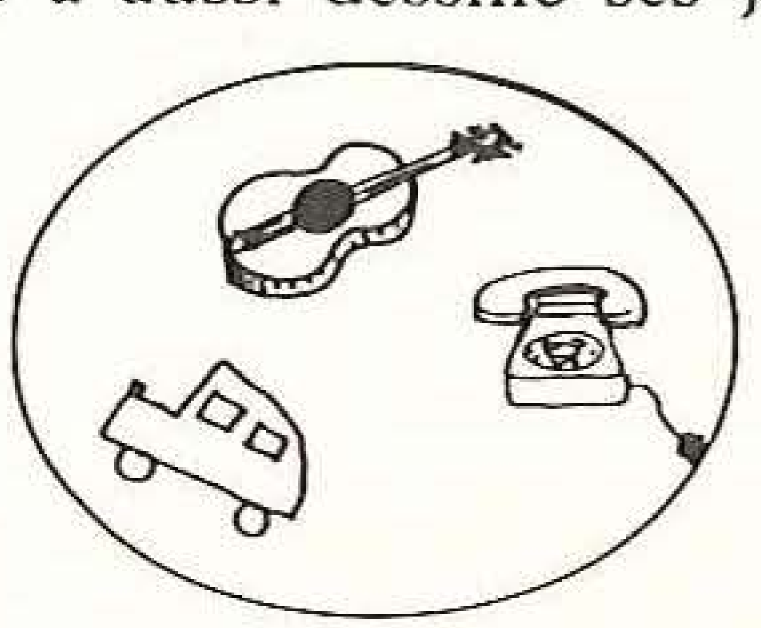


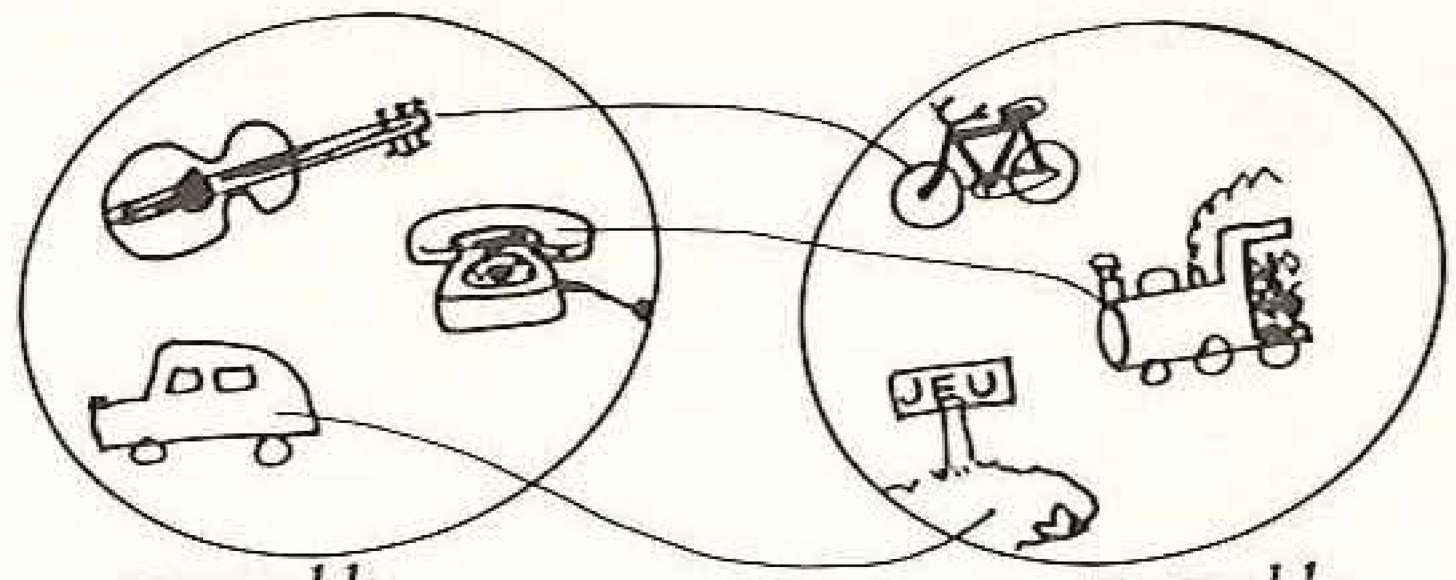
symbolisation : (4)

Quand Régine descend du toboggan, elle joue avec elle-même (réflexivité) (5). Il faut ajouter : Régine

Nous avons abordé la *relation d'équivalence* (6) qui répond aux 3 axiomes : transitivité, symétrie, réflexivité.

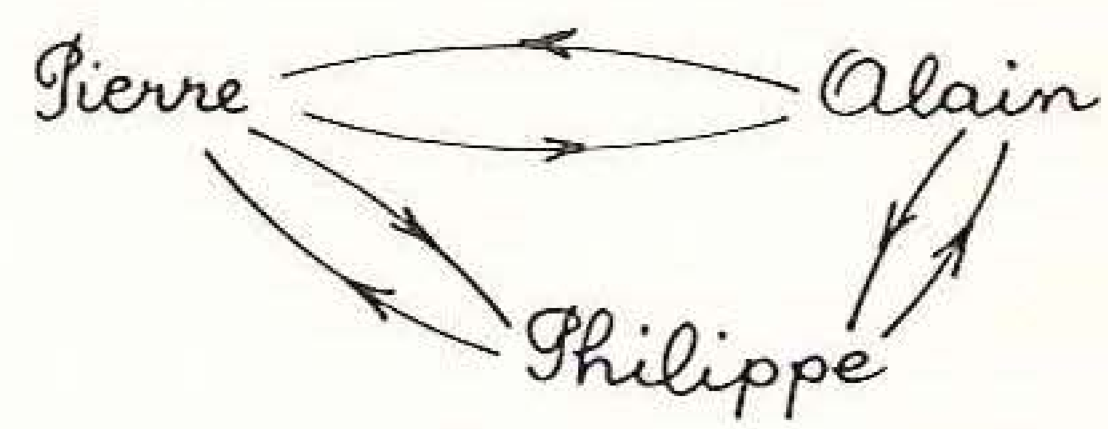
Philippe a aussi dessiné ses jouets :





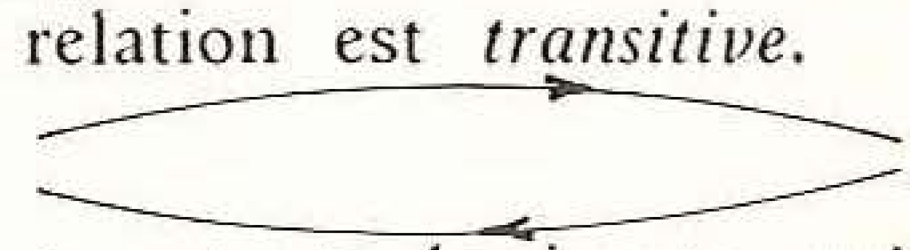
ensemble des jouets de Philippe — *ensemble des jouets de Pierre*

Par la correspondance terme à terme, on voit que Philippe a autant de jouets que Pierre.
Nous avions vu que Pierre avait autant de jouets qu'Alain :



a autant de jouets que

Donc Philippe a autant de jouets qu'Alain.
Cette relation est *transitive.*



Pierre a autant de jouets qu'Alain, mais on peut dire aussi qu'Alain a autant de jouets que Pierre.

Cette relation est *symétrique.*
Nous pouvons dire aussi que Pierre a autant de jouets que lui-même.

Pierre

Cette relation est *réflexive.*

La relation « a autant de jouets que » étant transitive, symétrique, réflexive, est une *relation d'équivalence.*

Ce second exemple introduit la relation d'équivalence numérique, c'est-à-dire *l'équipotence* (voir correspondance terme à terme).

C) Relation d'ordre

Olivier ne veut pas mettre la pièce de 1 F dans la même poche que le gros mouchoir.

— *Ça va me crever la poche. Ils pèsent trop tous les deux.*
— *C'est la pièce qui est la plus lourde ou le mouchoir ?* (+ que) (7).

Utilisons la balance :

« *Le mouchoir pèse plus que la pièce* » est écrit :

mouchoir ⧅ *pièce*
(symbolisation) (4)

Marie-Clotilde veut comparer le poids de son petit mouchoir et de la pièce :

pièce ⧅ *petit mouchoir*

Sans peser, elle déduit :

mouchoir ⧅ *petit mouchoir*

C'est la *transitivité* (1) :

$$\left.\begin{array}{l} aRb \\ bRc \end{array}\right. \Longrightarrow aRc$$

Daniel, qui n'a pas bien compris, lit en commençant par la gauche :

pièce ⧅ *mouchoir*
« *Non ! on ne peut pas lire à l'envers.* »
(antisymétrie)

Toute relation répondant aux 3 axiomes (transitivité, antisymétrie, réflexivité), est une *relation d'ordre* (8).

D) Couples

— *Ce matin il y a 4 absents : ce sont 3 garçons et 1 fille. Cela aurait pu être 2 garçons et 2 filles. Ou 3 filles et 1 garçon, etc.*

On représente :

garçons	*filles*
3	1
2	2
1	3
0	4
4	0

(3,1) et (2,2) et (1,3) etc. sont *les couples* possibles qui ont pour résultat 4. (n° 9)

On pourrait aussi les représenter :

G \ F	0	1	2	3	4
0					×
1				×	
2			×		
3		×			
4	×				

E) Applications

1. Brigitte a changé de lit avec sa sœur. Elle aurait pu dormir aussi dans le berceau de son petit frère.

On dessine :

lit de Brigitte	*lit de Christine*	*lit de Jean-Henri*
Brigitte	Christine	Jean-Henri
Christine	Brigitte	Jean-Henri
Jean-Henri	Christine	Brigitte
Jean-Henri	Brigitte	Christine

(ce n'est pas possible : Christine est trop grosse!)

Il y aurait encore d'autres cas possibles.

2. Christine ne contient pas dans le berceau de Jean-Henri, mais Brigitte et Christine peuvent dormir ensemble dans le lit de Brigitte, par exemple. On dessine :

lit de Brigitte	*lit de Christine*	*berceau de Jean-Henri*
C., B.		Jean-Henri
J-H., B.	Christine	
	B., C., J-H	

La 1re représentation montre un exemple d'*application bijective* (10) (chaque élément de l'ensemble départ correspond à un élément de l'ensemble arrivée) (11)

F) Permutations

On désigne par le même terme de « *permutation* » :
— l'action de permuter
— le résultat de cette opération.

En regardant le plan de la classe, Guy, qui est au fond, veut se reconnaître à la place de Marie-Pierre, qui est devant (or le fond de la classe est représenté en bas du dessin sur le tableau).

Ce déplacement plaît aux enfants qui opèrent toute la transformation.

Plan initial :

Elvire	*Marie-Josée*	*Marie-Pierre*
Daniel	*Serge*	*Melyka*
Dominique	*Jean-Luc*	*Albert*
Pascal	*Robert*	*Guy*

Nouveau plan
(après la permutation) : (12)

Pascal	*Robert*	*Guy*
Dominique	*Jean-Luc*	*Albert*
Daniel	*Serge*	*Melyka*
Elvire	*Marie-Josée*	*Marie-Pierre*

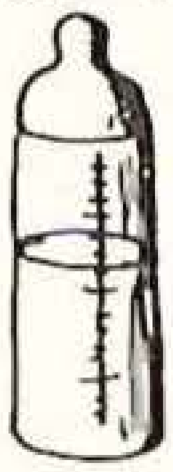
La permutation est effectuée ici selon la symétrie par rapport à une droite (13).

La *permutation* s'effectue entre les éléments d'un même ensemble. C'est un cas particulier d'*application bijective.*

III SYMBOLES ET SYMBOLISATION

A) De l'objet réel vers les symboles

De 0 *à* 1 *an :*
objet vrai ou personne

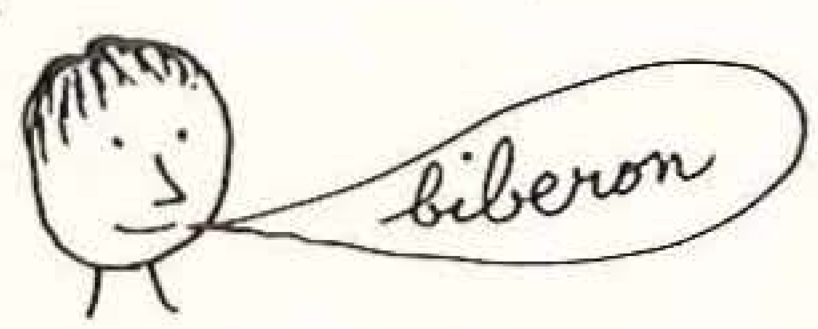


l'enfant, son moi,

L'expérience des choses qu'il trouve autour de lui : la maman, le biberon...

2^e^ *année :*
association des mots représentatifs des objets (pour un enfant, un mot est un acte)

3^e^ *année :*



il apprend à parler. La parole, ensemble de symboles grâce auxquels il peut faire état de ses expériences, lui permet de communiquer ; le dessin et le mot écrit viennent ensuite.

Donc, pour traduire son expérience des êtres et des choses, pour *communiquer,* un enfant a à sa disposition plusieurs modes d'expression :

objet ou personne réels → le mot prononcé (langage)
objet ou personne réels → l'image (le dessin)
objet ou personne réels → le mot écrit (écriture)

Dès le départ, il y a dans le but de communiquer avec les autres l'établissement de conventions, de codes. Le plus souvent, l'enfant adopte le langage, l'imagerie, les écritures utilisés par son entourage, mais en les passant toutefois au crible de son expérience personnelle.

L'enfant prend peu à peu conscience que le dessin, le mot prononcé ou écrit se différencient de l'objet ou de la personne réelle, qu'ils n'ont pas d'existence mais sont des symboles, des conventions qui s'accrochent aux objets dans un but de communication.

Le mot chien n'aboie pas, le portrait d'une maman ne peut remplacer ses baisers.

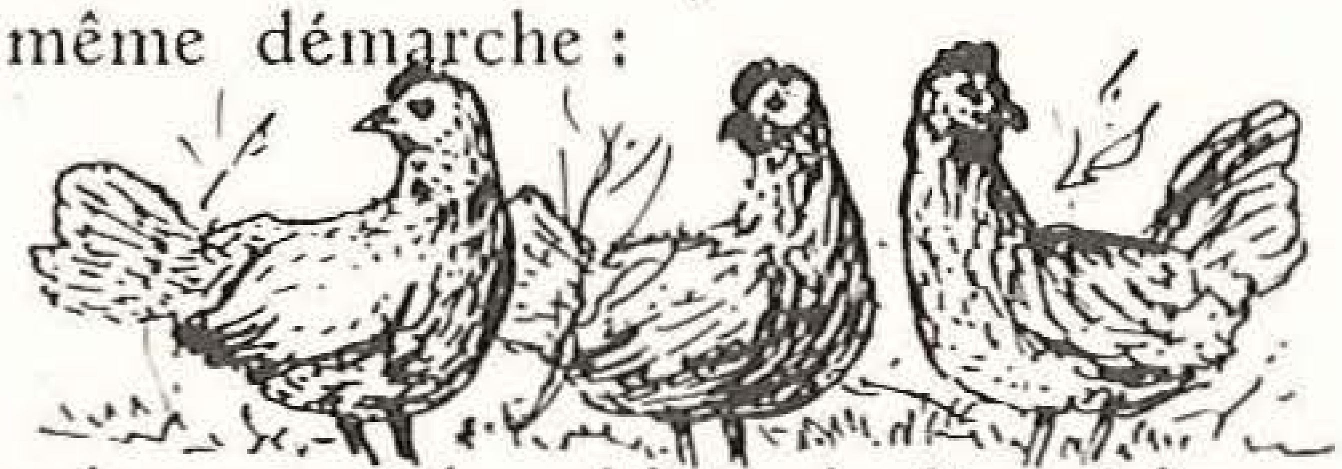
Or, ce détachement du symbole par rapport à l'objet n'est pas évident au départ.

Sabine (4 ans) pleure quand Alain veut découper sa silhouette dessinée sur un grand carton. Elle dit : « *Je vais avoir très mal. Je ne veux pas* ».

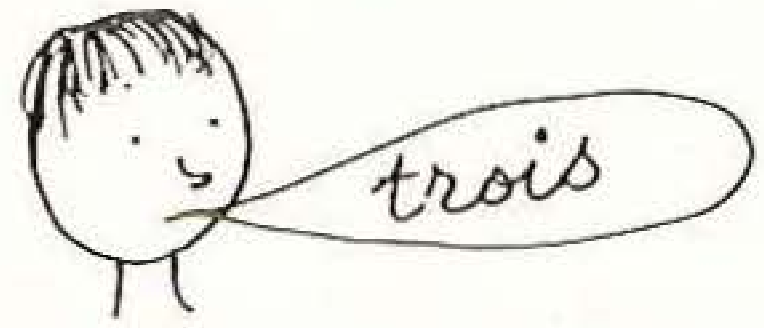
La prise de conscience du symbole en tant que tel est très lente et primordiale pour aller vers le symbolisme mathématique.

B) Symbolisation du nombre

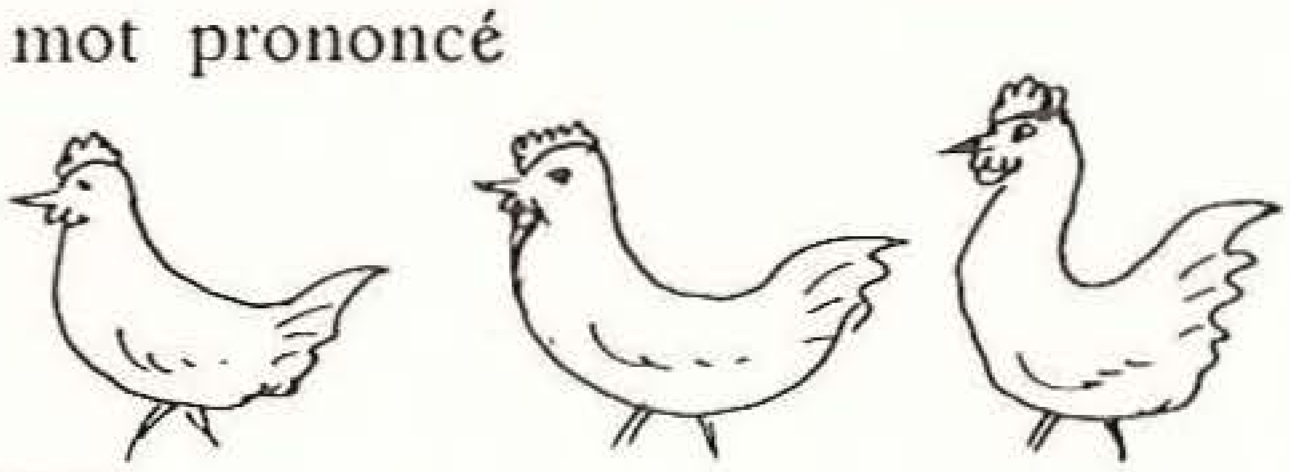
Pour les nombres, nous avons la même démarche :



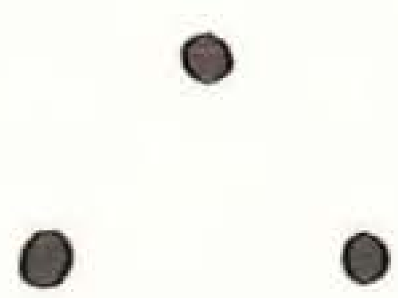
animaux réels, objets de l'expérience



le mot prononcé



l'image



la représentation

Soit parce que l'image est imparfaite, soit parce qu'il est incapable de faire une image fidèle, soit parce que reproduire 20 fois la même image est fastidieux et long, l'enfant simplifie sa représentation.

Il dira : « • *est une poule* ».
Nous avons là un code, et son utilisation :

trois poules 

A un degré conscient plus élevé, se débarrassant du support objectif et voulant représenter le nombre, l'enfant peut adopter une manière caractéristique d'écrire et de reconnaître ce nombre, d'où la naissance de constellations (écriture personnelle du nombre).

trois 

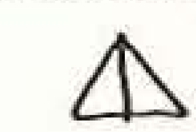
Il y a là invention, création d'un signe (notion de chiffre = du nombre).

Si on est alors à l'écoute de l'enfant, il y a là une richesse infinie de possibilités de créations passionnantes qui nous amènent directement vers l'invention de systèmes de numération différents du nôtre. Puis nous retombons pour les besoins de la communication dans les écritures en vigueur.

• • • → *trois* mot écrit
• • • → 3 chiffre

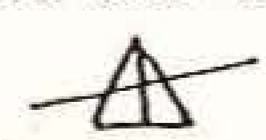
C) Les signes

— Nous retrouvons la même démarche quand il s'agit de traduire n'importe quelle *propriété d'ensembles.*
par ex. : les mots collectifs

animal → 

signe conventionnel nous permettant de désigner à la fois les oiseaux, les mammifères, etc. (Il est impossible de dessiner un animal ayant à la fois 2 ou 4 pattes, des ailes ou pas d'ailes, etc.)

— Même démarche encore pour traduire la négation, la non-propriété : *ceux qui ne sont pas des animaux*



(le signe barré devient le symbole de la négation) : « *Non, ce n'est pas vrai, je le barre* », démarche très naturelle.

— Même démarche encore pour la naissance du signe = et $\neq$, des signes $<$, $>$ etc.

Ici encore, l'enfant doit avant de se servir des signes conventionnels habituels *créer les siens propres*, les affiner, les simplifier, prendre conscience de leur utilité. C'est seulement par la suite que le maître pourra lui donner les signes d'utilisation courante, le plus tard possible. Si ces signes sont donnés prématurément, non seulement nous éliminons toute une part de recherche et de création, mais il est presque certain qu'ils ne seront pas assimilés par les enfants ; alors le maître les imposera sous la forme de mécanismes, ce qui est tuer l'esprit mathématique.

De même, si l'on n'a pas tué chez l'enfant ce besoin de trouver des façons de s'exprimer, il cherchera des représentations. Si on ne lui a pas donné de but en blanc le diagramme de Venn (la fameuse patate), le tableau cartésien, etc., nous trouverons chez l'enfant, par besoin de clarification et d'économie de moyens, la création de représentations plus ou moins parfaites pouvant mener naturellement, et le besoin s'en faisant sentir, à des représentations en vigueur.

Il ne faut jamais être pressé, le tâtonnement de l'enfant n'est pas du temps perdu, bien au contraire.

IV LOGIQUE

En classe, un groupe d'enfants raconte :

— *Dimanche, on est allé à la foire Il y avait des manèges : des autos tamponnantes, des balançoires, même la chenille.*

On peut faire l'ensemble des manèges de la foire (1).

— *Eric, es-tu monté sur les manèges ?*

— *Non.*

— *Et toi, François ?*

— *Oui.*

logique (2)

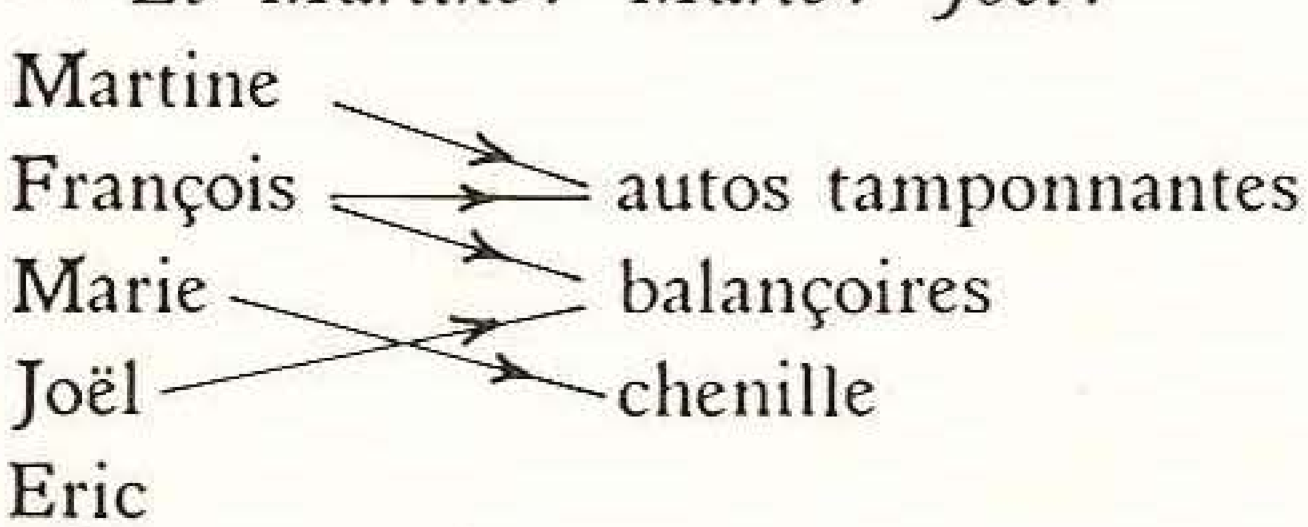
— *Je suis monté sur les autos tamponnantes et sur la balançoire.*

⟶

est monté sur symbole (3)

représentation sagittale (4)

— *Et Martine ? Marie ? Joël ?*



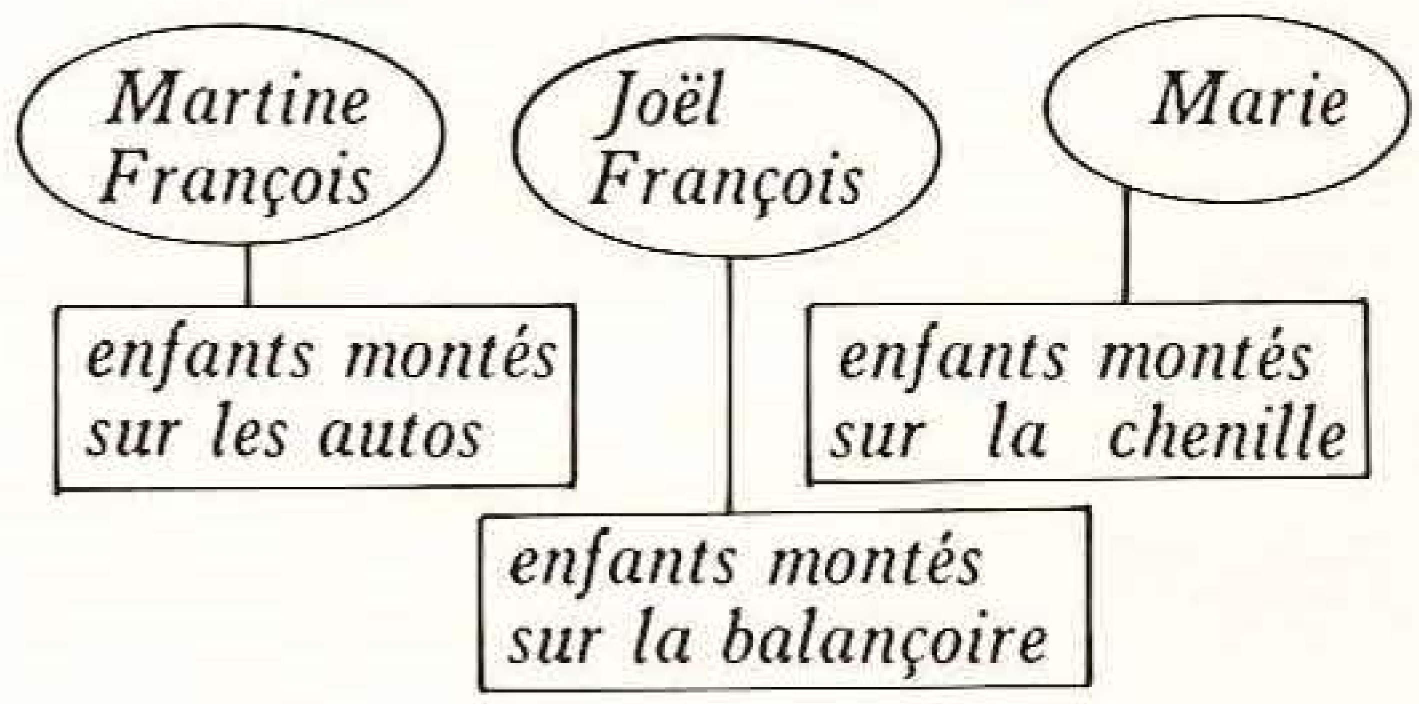
Alain qui n'était pas là, peut savoir où sont montés les enfants (5).

Il lit :

Martine est montée sur les autos
François est monté sur les autos <u>et</u> la balançoire
Marie est montée sur la chenille
Joël est monté sur la balançoire

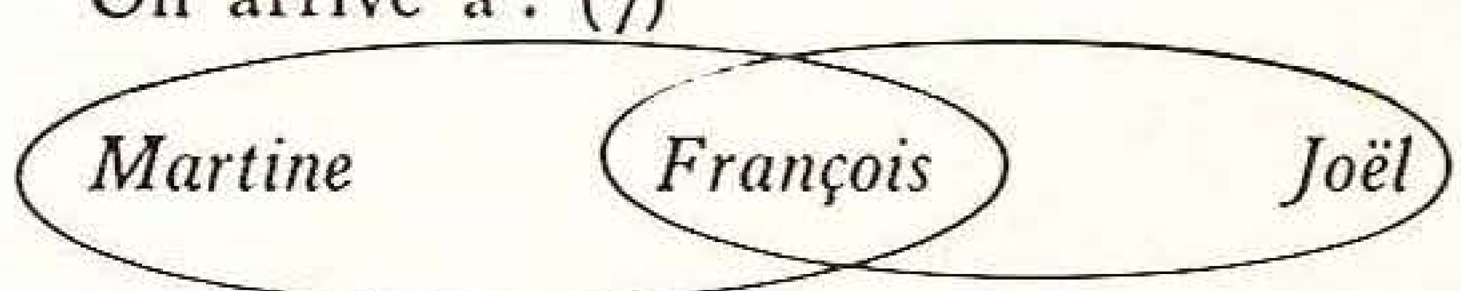
Il pourra faire : (6)

— l'ensemble des enfants montés sur
les autos
la balançoire
la chenille

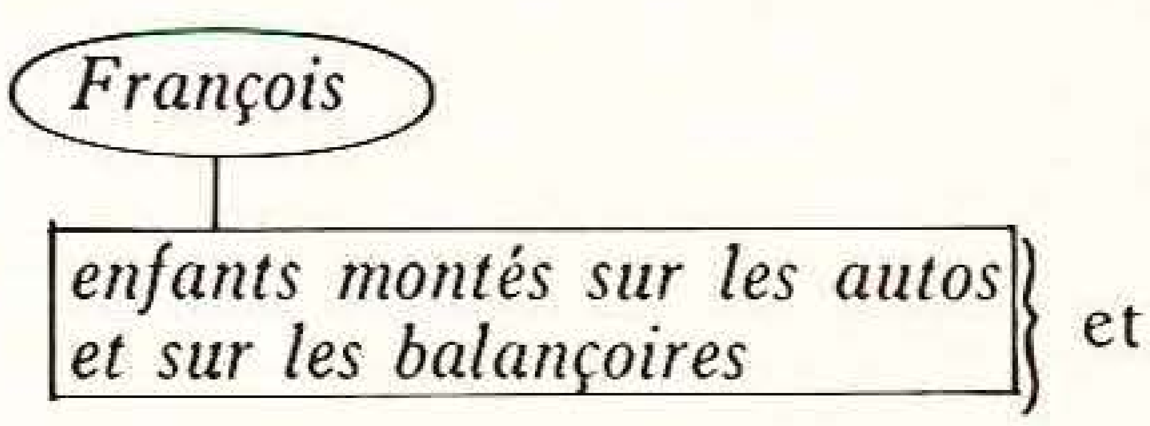


Jean-Marie s'aperçoit que François est à la fois dans l'ensemble des enfants montés sur les autos et dans l'ensemble des enfants montés sur la balançoire. Il est à l'intersection.

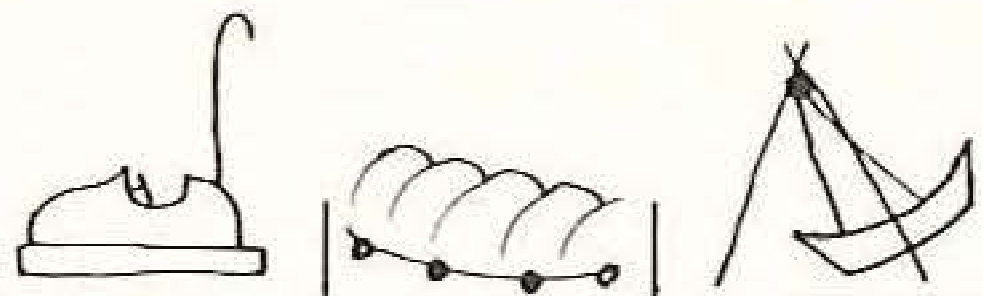
On arrive à : (7)



Paul a fait : (8)



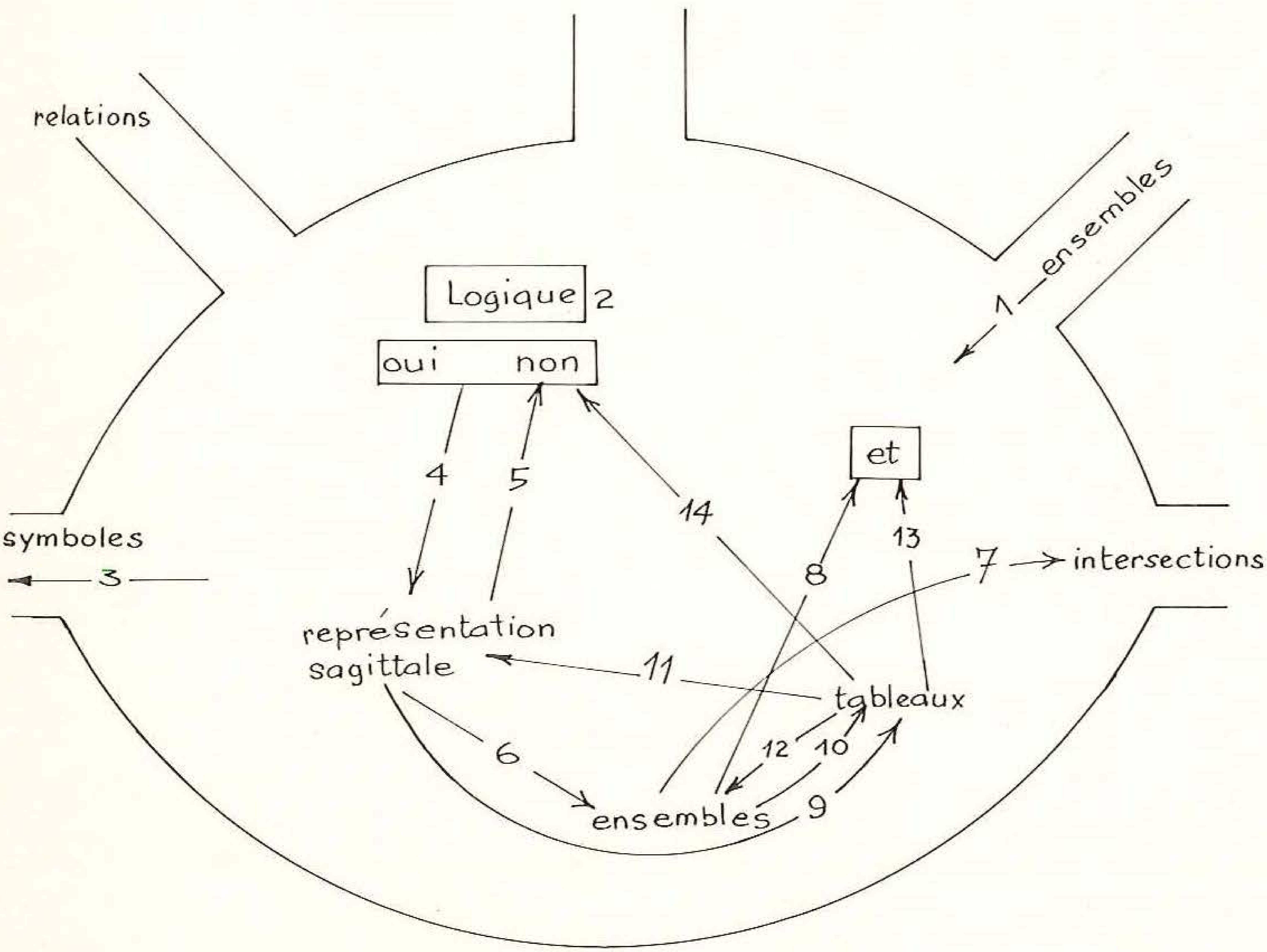
Nos correspondants ont représenté différemment cette situation. Ils nous ont envoyé le tableau suivant : (9) et (10)



Martine	•		
François	•		•
Marie		•	
Joël			•
Eric			

Des enfants ont vérifié le tableau :
— certains en reprenant le travail qu'ils avaient fait (représentation sagittale, ensembles) (11) et (12)
— Alain en se posant des questions : *François est-il monté sur les autos? oui ; sur la balançoire? oui ; sur la chenille? non...* etc. (13) et (14).

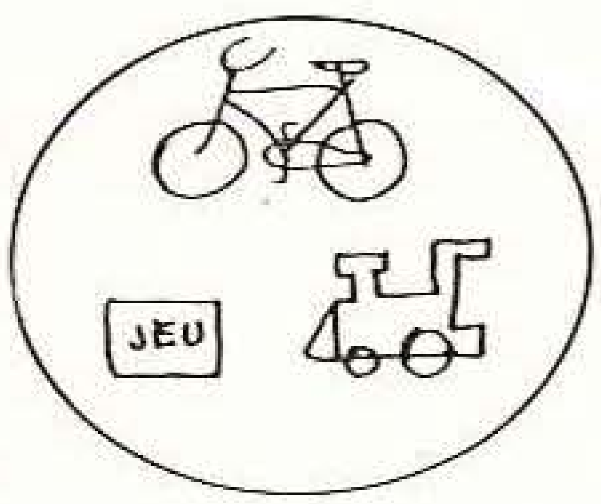
Attention :
Il ne faut pas croire qu'une situation semblable dans votre classe vous mènera obligatoirement à toutes ces pistes. Les exemples sont choisis ici de façon à expliquer les termes et les liaisons. Les numéros des flèches ne correspondent pas à un ordre à suivre rigoureusement : ils sont là pour aider à la compréhension du texte.



V LE NOMBRE

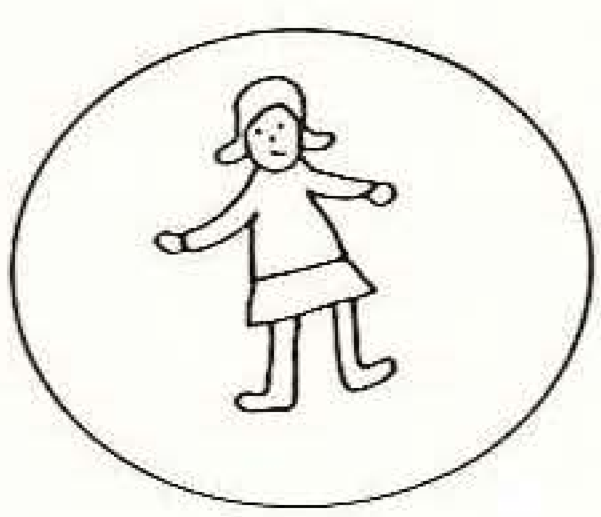
A) Correspondance terme à terme

Après Noël, les enfants parlent de leurs cadeaux. Chacun dessine ce qu'il a eu.

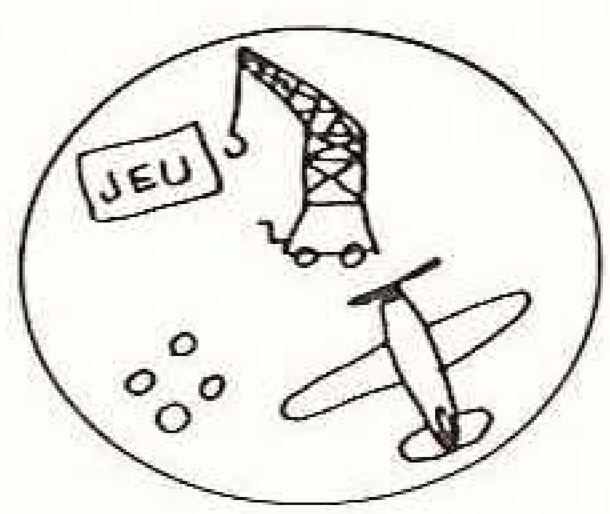


ensemble des jouets de Pierre

ensemble des jouets d'Alain

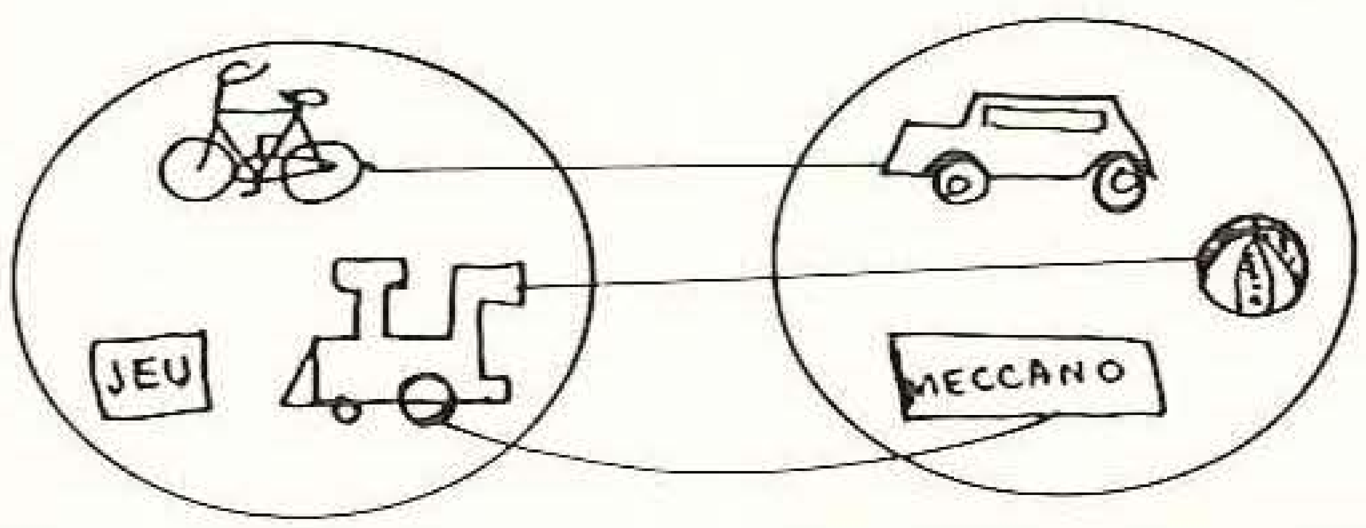


ensemble des jouets de Marie



ensemble des jouets de Jean

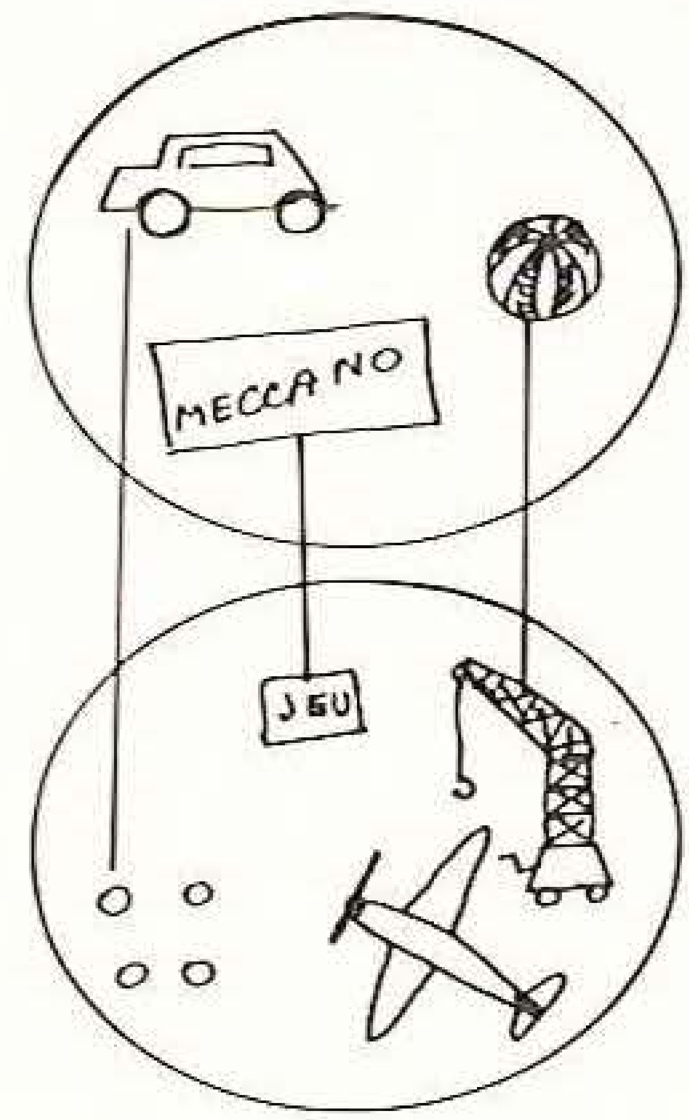
Les enfants veulent savoir qui a le plus grand nombre de jouets. A l'aide de gestes, les enfants font des comparaisons. Un élève a l'idée de relier les jouets par un trait :



ensemble des jouets de Pierre

ensemble des jouets d'Alain

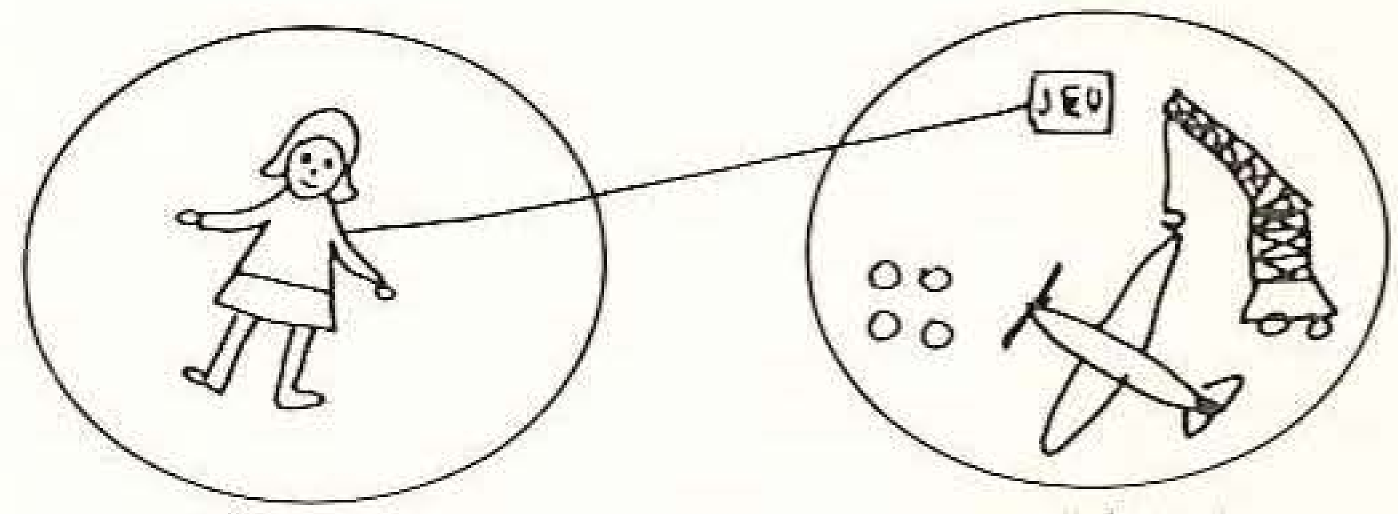
A chaque jouet de Pierre correspond un jouet d'Alain, donc Pierre a *autant* de jouets *qu'*Alain.



ensemble des jouets d'Alain

ensemble des jouets de Jean

Il reste un jouet de Jean qui n'a pas son correspondant, donc Jean a *plus* de jouets *qu'*Alain.



ensemble des jouets de Marie

ensemble des jouets de Jean

Les jouets de Marie ne correspondent pas à tous les jouets de Jean, donc Marie a *moins* de jouets *que* Jean.

Par correspondance terme à terme nous pouvons donc dégager les notions suivantes :

autant que *plus que* *moins que*

ou encore :

même nombre d'éléments
(autant que)
plus grand nombre d'éléments
(plus que)
plus petit nombre d'éléments
(moins que)

La comparaison d'ensembles nous mènera d'abord à définir (le plus souvent) *plus que* et *moins que* avant *autant que* qui n'est qu'un cas particulier de cette comparaison. *Symbolisation* $<$ $>$

Deux termes mathématiques paraissent alors s'imposer, ce sont les notions d'élément et de nombre.

B) La notion d'élément

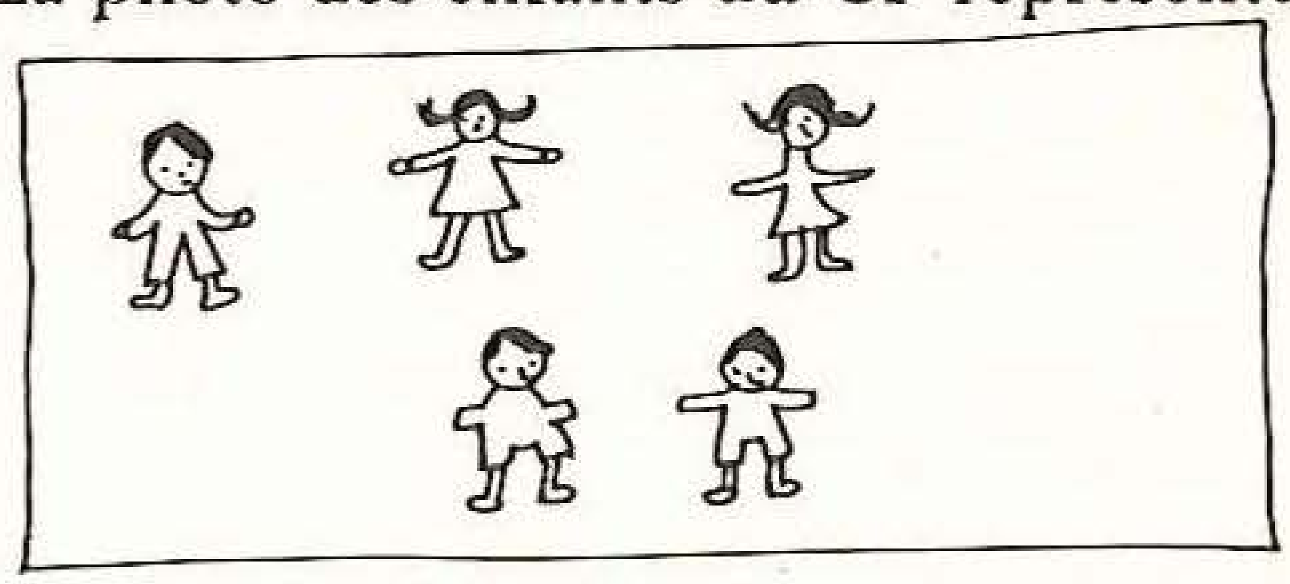
Elle suppose que l'enfant a saisi ce qu'est la représentation d'un objet.

Quand l'enfant dessine un chat il fait correspondre le chat réel avec l'image du chat. C'est par *convention* le chat car l'enfant doit bien se rendre compte que son dessin ne miaule pas et pourtant il établit une *identité* entre l'image et le chat. Chaque représentation correspond dans son esprit à l'objet ou au personnage réel. Son affectivité le pousse même vers une identification totale avec son portrait ou le signe qui le représente, il doit s'en défendre d'où l'intérêt des représentations variées d'un même objet et de ne pas s'enfermer dans un système de symboles. Il faut que l'enfant dise en montrant son dessin ou le mot écrit ou le symbole de l'objet réel, *c'est la même chose, c'est l'objet.* Il faut qu'il ait nette conscience que les diverses représentations d'un objet ou d'un ensemble ne sont en réalité qu'UN. Il sera donc amené à définir la notion d'égalité par rapport aux notions d'équivalence et d'équipotence.

C) Egalité - Equipotence

Dans la classe voici les élèves du CP.

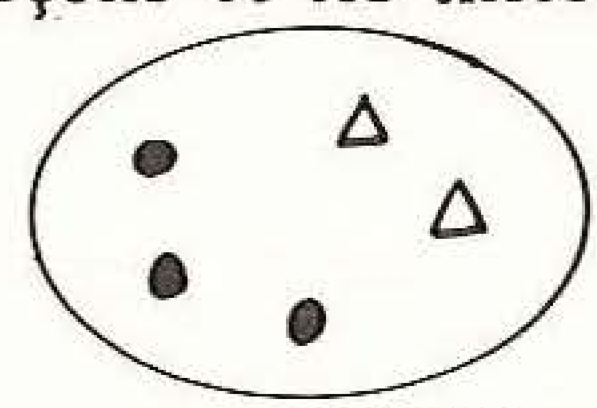
La photo des enfants du CP représente



Ensemble des enfants du CP

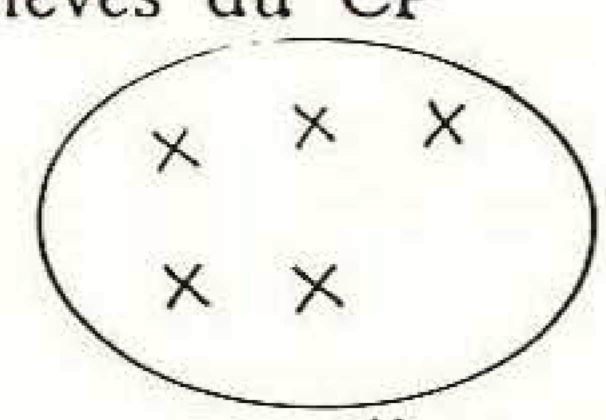
Liste des élèves du CP
Alain Dupont
Sophie Durand
Jean Dupont
Eric Blanc
Marie Dubois

Les garçons et les filles du CP



code garçon → ●
fille → △

Les élèves du CP



code élève → ×

La notion d'élément s'affine de plus en plus.

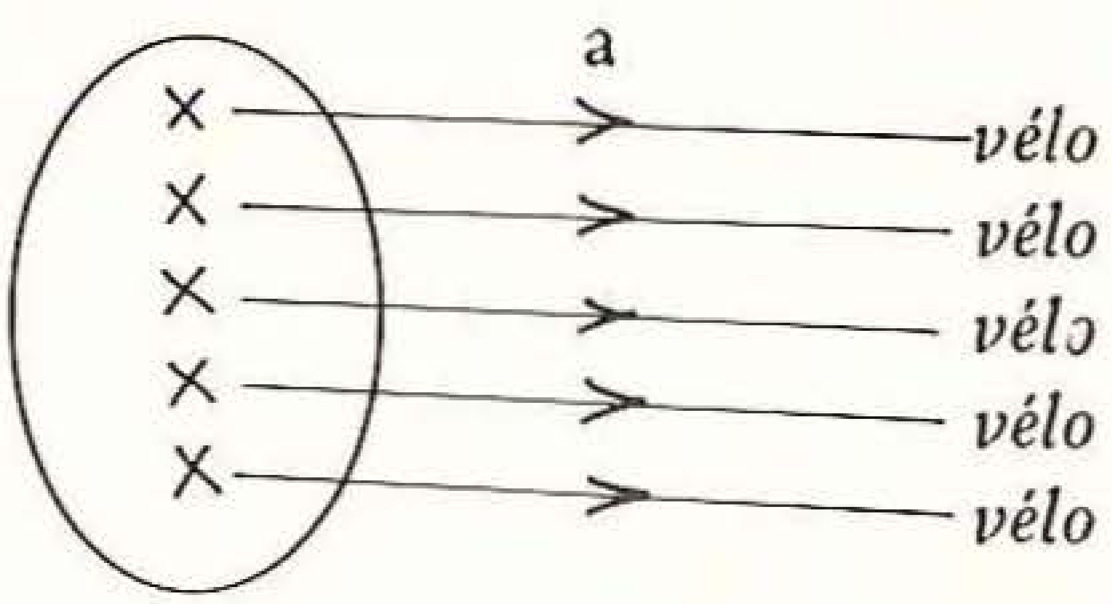
Alain Dupont — photo — nom
(réel) (identité)
Alain devient peu à peu ● ou ×
● garçon ou × élève du CP
on distingue l'élément par une de ses qualités qui peut être implicitement le nombre, sa qualité étant alors d'être *un*.

Tous ces ensembles sont *égaux* car ils ne sont que les diverses représentations d'un *même ensemble,* ce sont les critères de définition qui changent : *un ensemble n'est égal qu'à lui-même.*

L'enfant dira : c'est la « *même chose* » il y a *identité.*

Par contre si chaque enfant du CP a un vélo,

Enfants du CP



Ensemble des vélos

je ne peux pas dire que l'ensemble des vélos = l'ensemble des enfants du CP. C'est une simple question de bon sens. L'enfant ne dira pas c'est la « même chose » mais il y a autant de vélos que d'enfants ou il y en a *le même nombre.*

L'ambiguïté est que pour noter cette *équipotence* (équivalence en nombre) le signe conventionnel en vigueur s'appelle *égal* =

D) Le cardinal

En passant directement à la comparaison quantitative d'ensembles, on semble oublier que le nombre n'est qu'une qualité au même titre que pointu ou être frère de..., il ne peut être privilégié aux dépens des autres car il ne peut être vraiment conçu que dans son contexte et par rapport à son environnement.

L'étude des relations d'équivalence est indispensable comme préliminaire à l'étude du nombre. Par exemple, la pratique de la mesure en atelier de calcul peut favoriser cette maturation : *avoir le même poids, la même taille,* etc. (sans aucune idée de nombre).

L'étude des formes, des couleurs, de toutes les relations d'équivalence en général, sont indispensables. Quand on a pu dire que deux ensembles sont *équipotents,* c'est-à-dire qu'ils ont même propriété numérique ou même *cardinal,* on ne peut déduire de but en blanc que *par convention* ce cardinal s'appellera trois, par exemple. Il faudrait plutôt laisser s'accumuler les ensembles composés dans diverses classes afin que le nombre se dégage bien de l'objet et que l'on ne dise plus seulement trois pommes, mais aussi trois, d'un ensemble formé par une tasse, une pipe et un indien.

Plus le nombre d'ensembles appartenant à la classe trois est grand et varié, plus l'enfant aura loisir de choisir sa référence de trois.

Une erreur à notre avis serait de travailler avec des petits nombres et d'éliminer les grands à leur profit.

L'enfant qui arrive au CP a déjà des mécanismes montés, il sait compter ou plutôt il sait sa comptine. Il est préférable de travailler aussi avec des nombres qu'il ne connaît pas, où tout sera à découvrir, où il faudra avancer pas à pas.

Une autre erreur serait aussi de vouloir comme dans l'ancien programme (ou même certains livres de math modernes pour le CP), étudier les nombres de 0 à 10 puis de 10 à 20... Nous enlevons alors à l'enfant tout un travail de classement, de symbolisation, de numération. Ce n'est que par l'expérience tâtonnée que l'enfant établira à un deuxième degré, des comparaisons avec les nombres, qu'il les mettra en ordre, qu'il découvrira la suite des nombres et la loi qui la régit.

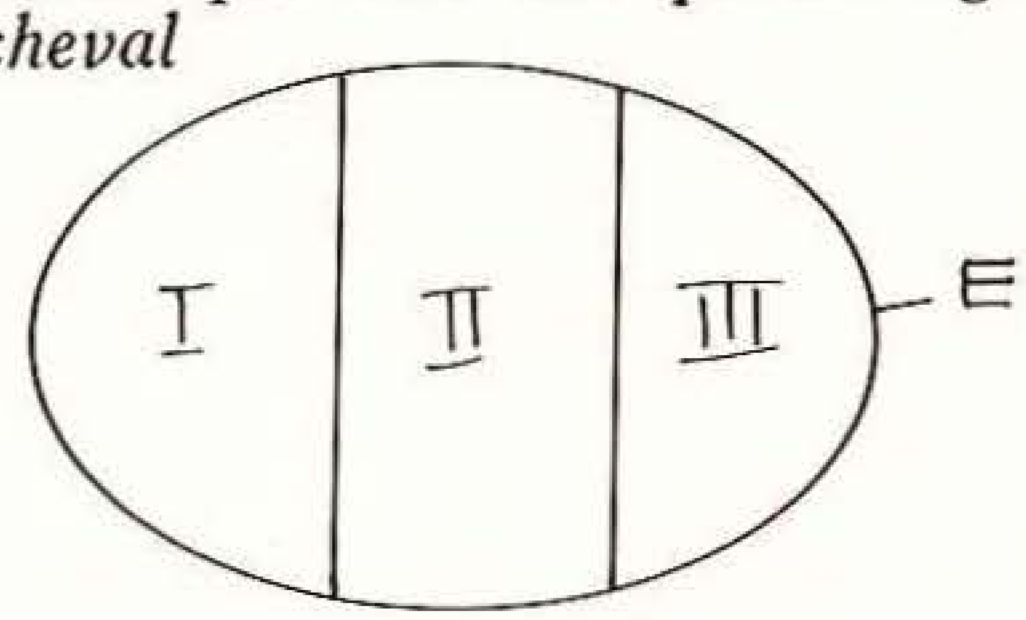
Du point de vue de la symbolisation, l'enfant a la porte ouverte à l'invention s'il se trouve devant le problème d'appeler et d'écrire un nombre qu'il ne connaît pas mais qu'il vient de découvrir. Il sera certainement amené à établir des systèmes de numération au lieu de rester enfermé dans le système à base 10, système si routinier pour beaucoup qu'il leur devient impossible d'en comprendre le mécanisme.

VI NUMÉRATION

A) Partition

Eric ce matin a porté sa collection de médailles de Napoléon.

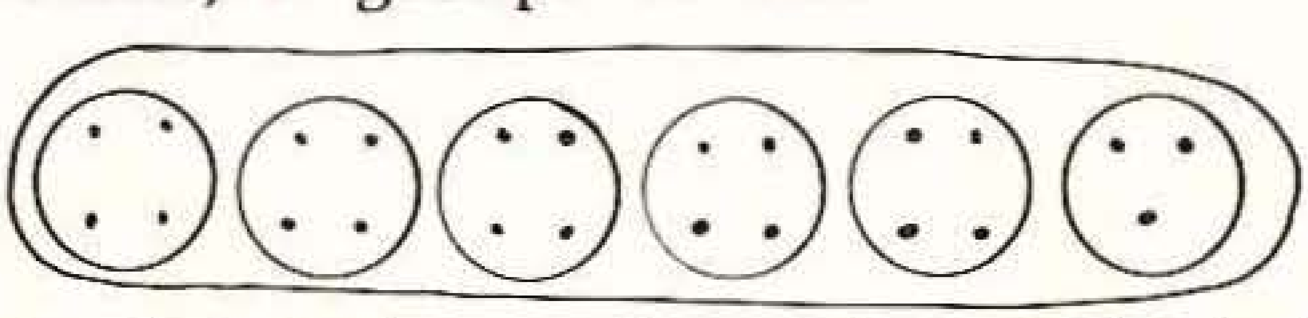
Alain les classe :
— *Elles ont toutes une abeille sur un côté, mais sur l'autre côté, il y a :*
I. *celles qui ont une tête (buste)*
II. *celles qui ont des personnages à pied*
III. *celles qui ont des personnages à cheval*



* Aucun ensemble n'est vide
* Il n'y a pas d'intersections
On dit que les ensembles sont *disjoints.*

* Toute pièce de la collection appartient à l'un des ensembles I, II, III. L'ensemble qui a pour éléments I, II, III est *une partition de E.* I, II, III s'appellent *les classes de E.*

Eric dit : « *Il y a beaucoup de pièces. Je vais les compter* ». Il se trompe, recommence. Il y en a trop, alors il dit : « *Je vais les compter par* 4 ». Ainsi, il groupe et dit :



quatre quatre quatre quatre quatre trois

Il a fait une partition. Certaines classes sont équipotentes (elles ont le même nombre d'éléments), mais pas toutes.

Eric est satisfait, il a compté ses médailles.

Remarque :
Souvent, les enfants font des groupements divers par souci de justesse, car ils n'aiment pas le reste. Nous voyons que ceci est logique, car correspondant à une notion mathématique : les partitions.

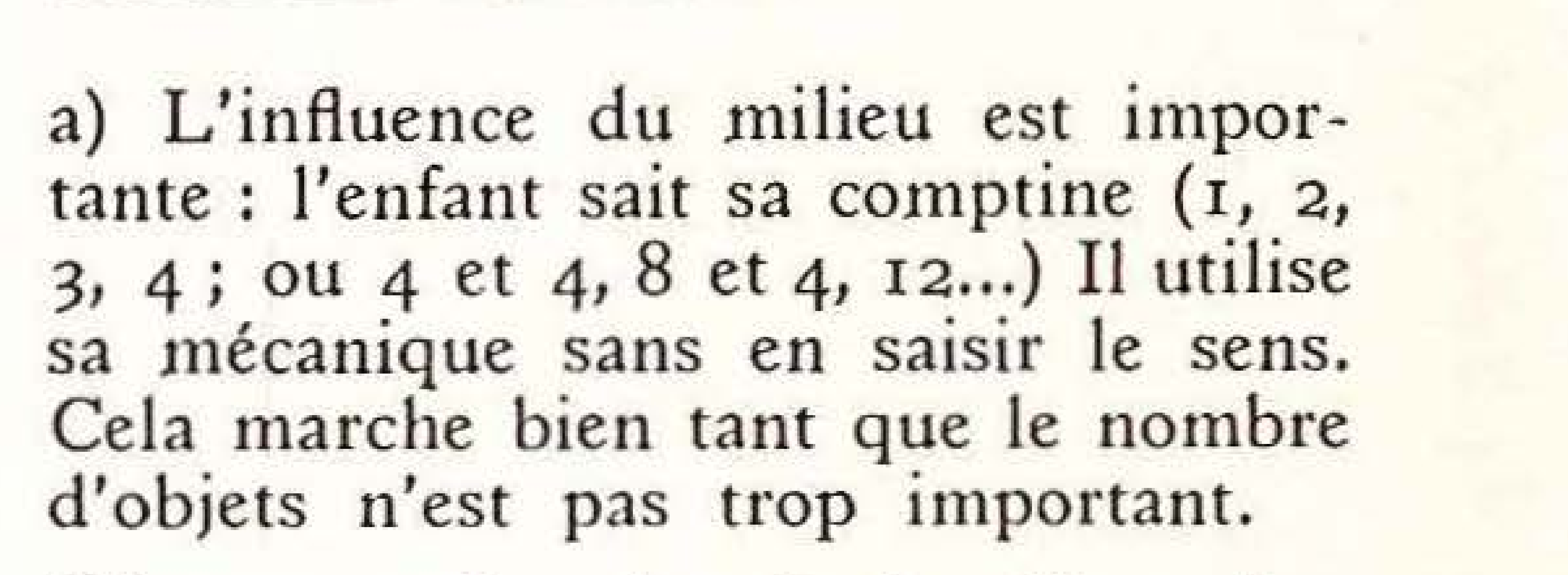
B) Les groupements

Si vous êtes à l'écoute des enfants, vous remarquerez certainement les démarches suivantes :

a) L'influence du milieu est importante : l'enfant sait sa comptine (1, 2, 3, 4 ; ou 4 et 4, 8 et 4, 12...) Il utilise sa mécanique sans en saisir le sens. Cela marche bien tant que le nombre d'objets n'est pas trop important.

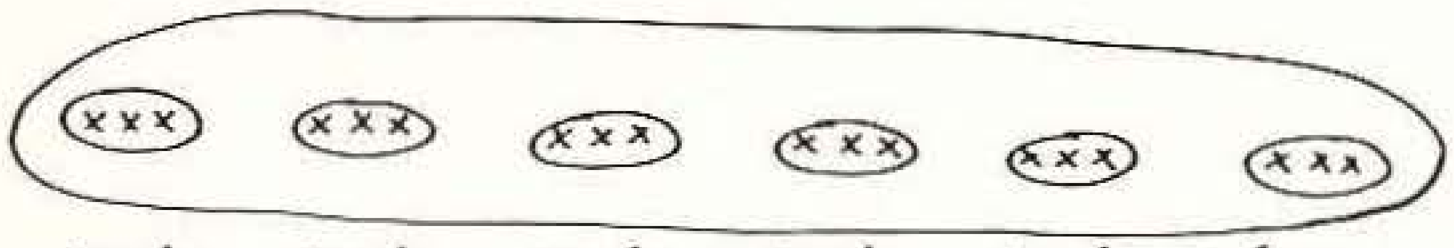
(Si vous voulez obtenir des démarches naturelles et un tâtonnement valable, n'évitez pas les situations où il y a des grands nombres, ceux que l'on retrouve le plus souvent dans les situations naturelles).

b) L'enfant fait alors appel à ses références. Il comptera de la façon suivante :
— il groupe par constellations :



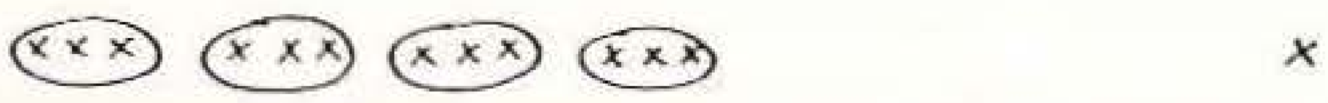
Il y en a 5 et 3 et 4 et 6 et 2. (Ceci se rencontre souvent en section de grands, à l'école maternelle).

c) Puis on trouve ceci (exemple d'Eric)



trois trois trois trois trois deux

d) Puis ceci :



trois trois trois trois et il reste 1

Là il n'y a plus comparaison avec des références, mais l'adoption d'un système avec le choix d'une référence (système de numération).

Remarque :
Chaque enfant a sa préférence pour un groupement particulier. Il est rare que ce soit « *dix* ». Le plus souvent, c'est 3, 5, 4, 2,... etc. L'enfant alors comptera ses groupes et dira :
« *Il y a 4 groupes de 3 et 1* ».
Nous avons ici *un groupement du 1^er^ ordre.*

L'enfant cherchera alors des symboles pour écrire rapidement. Le plus souvent, on aura :

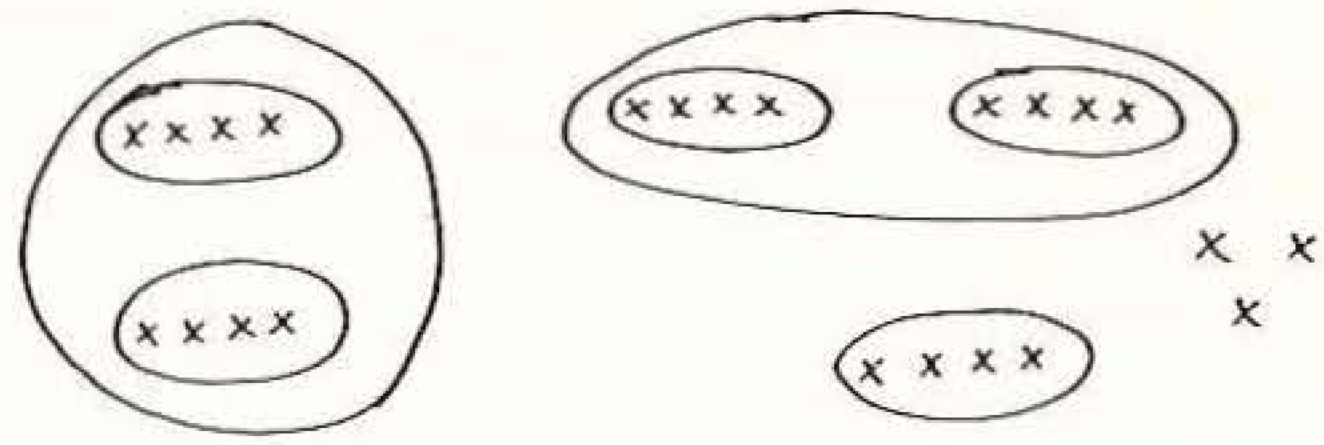
4  et 1

Le tableau :

xxx	x
4	1

est le plus souvent introduit par le maître. Il est cependant très utile, il faudra veiller seulement à ne pas l'introduire prématurément et éviter de le mécaniser avant qu'il soit parfaitement compris. (Ce qui n'est généralement pas le cas des fiches du commerce).

e) Parce qu'il connaît la chanson (1 et 1, 2 ; 2 et 2, 4 ; 4 et 4,8 ;) Jean-Louis groupe alors :



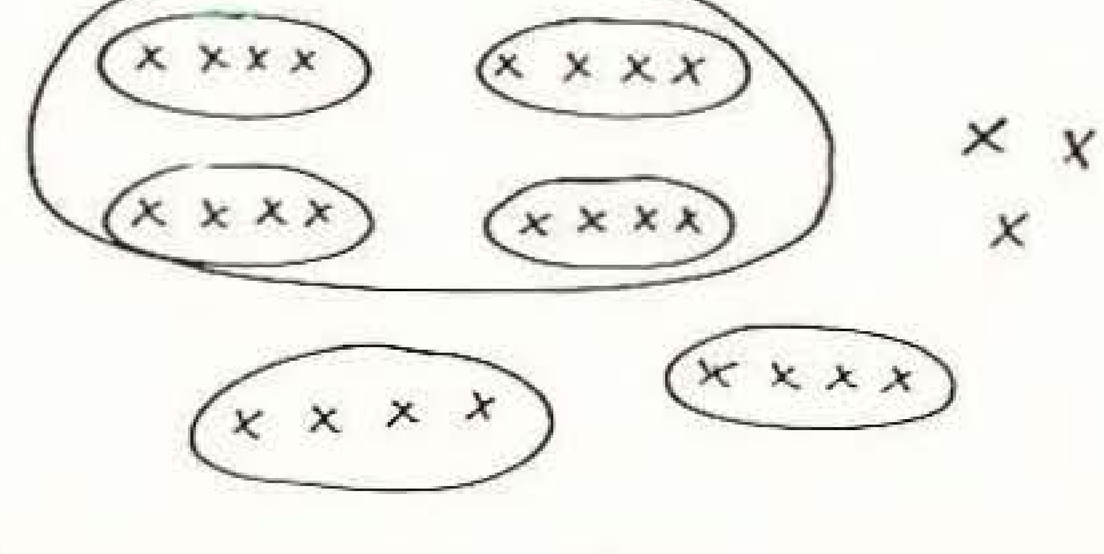
et dit : *8 et 8 et 4 et 3 ou 2 groupes de 8, 1 groupe de 4 et il reste 3.*

Il y a ici un groupement de 2^e^ ordre (avec changement de cardinal ou de cardinaux).

On retrouve souvent cette façon de faire.
Ceci vient souvent :
— soit du matériel naturel employé (ex. : les paquets de biscuits, différents emballages)
— soit du groupement privilégié (la paire, le double).

Ce qui est remarquable, c'est que ce groupement irrégulier se retrouve dans divers systèmes de numération (le système romain, par ex.). Cette démarche est le plus souvent éliminée, c'est très regrettable. C'est un des fondements du calcul mental.

f) Alors, quand trouverons-nous le groupement avec base régulière ? Exemple :



2^e^ *groupement* 4 × 4	1^er^ *groupement* 4	×
1	2	3

Nous avons constaté que ce groupement *n'est pas naturel :*

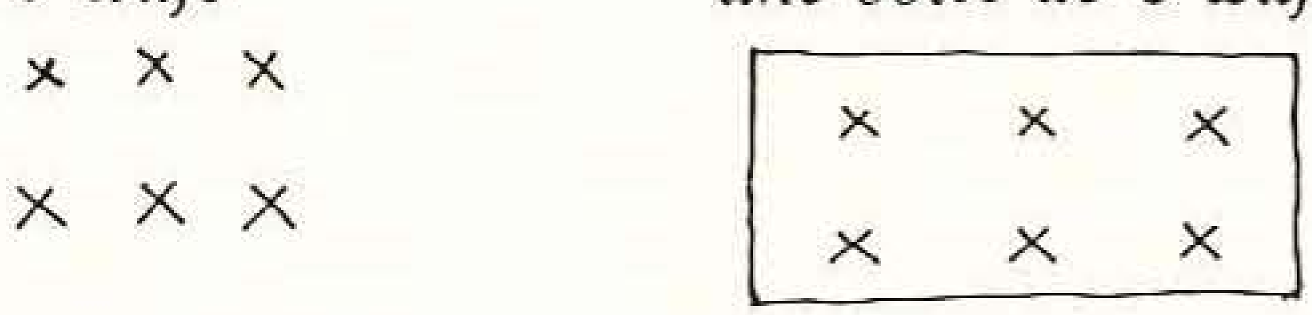
a) rares sont les exemples de ce groupement dans la vie courante ;

b) certes, dans nos CP, nous avons pu y arriver mais il a fallu comme on dit « donner le coup de pouce », soit en faisant appel à un matériel spécialement conçu pour amener aux bases, soit en amenant sci-même parce que c'est inscrit dans le programme.

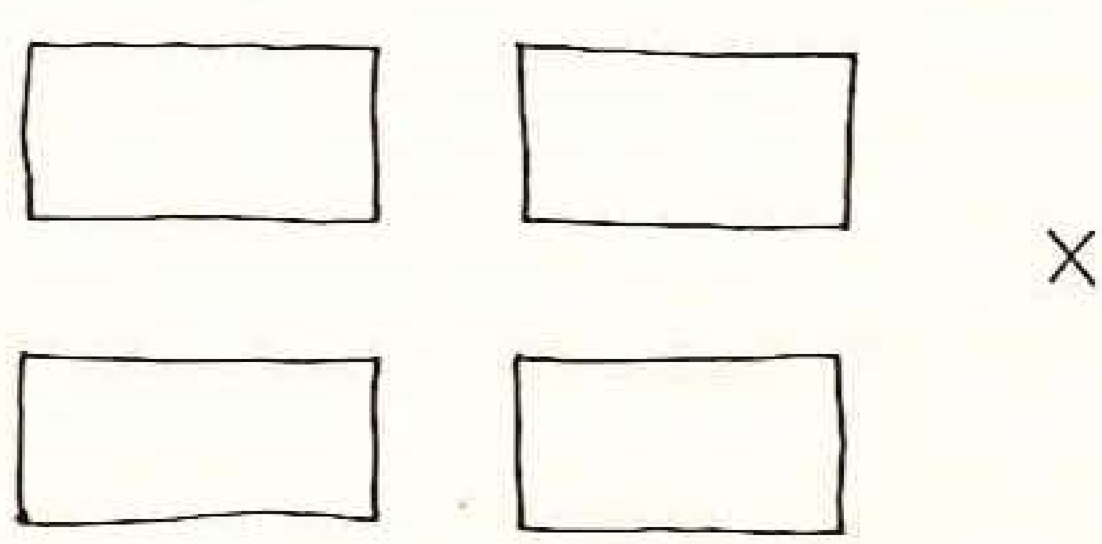
Dans les deux cas, nous avons constaté que la mécanique une fois montée fonctionnait bien, que les enfants s'amusaient beaucoup avec le matériel, mais il nous semble que nous avons ici un exemple de ce qu'il ne faut pas faire. Les enfants ont à leur disposition un mécanisme qu'ils ne peuvent pas utiliser dans la vie. Toute construction abstraite doit se vérifier par l'expérience, et pour nous le pays de quatre n'existe pas.

C) Codage numérique

C'est l'établissement d'un système de référence d'après le démarrage d'un système de numération.
Exemple :
par convention :
6 *œufs* — *une boîte de 6 œufs*

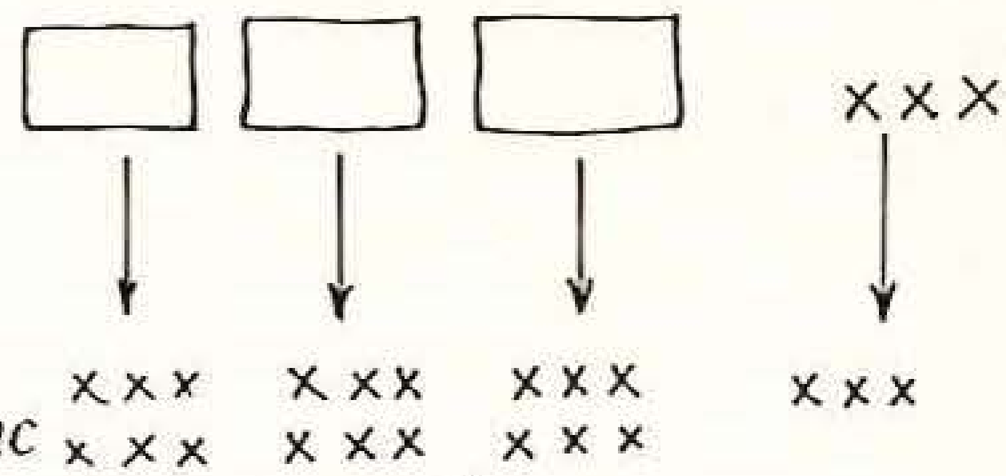


d'où 25 œufs s'écriront :



Décodage :
J'ai 3 boites d'œufs et 3 œufs :

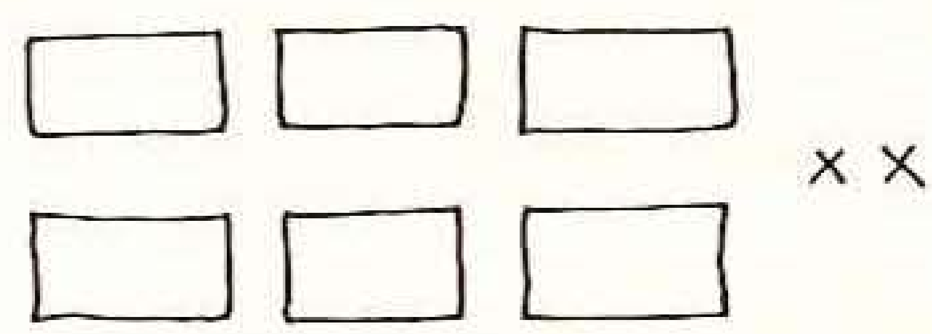
J'ai donc



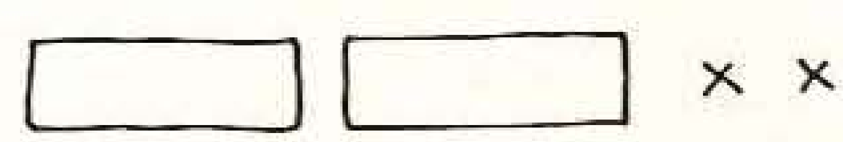
21 *œufs*

D) Comparaison des cardinaux
en utilisant les codes :

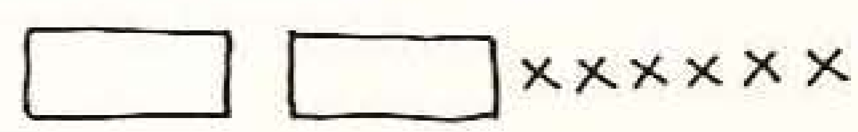
J'ai 26 *œufs.*
code : 6 *œufs* → $\boxed{\text{1 } boîte}$
j'aurai



4 *boîtes de* 6 *et* 2 *œufs*
nouveau code : 12 *œufs* → $\boxed{\text{1 } douzaine}$
j'aurai



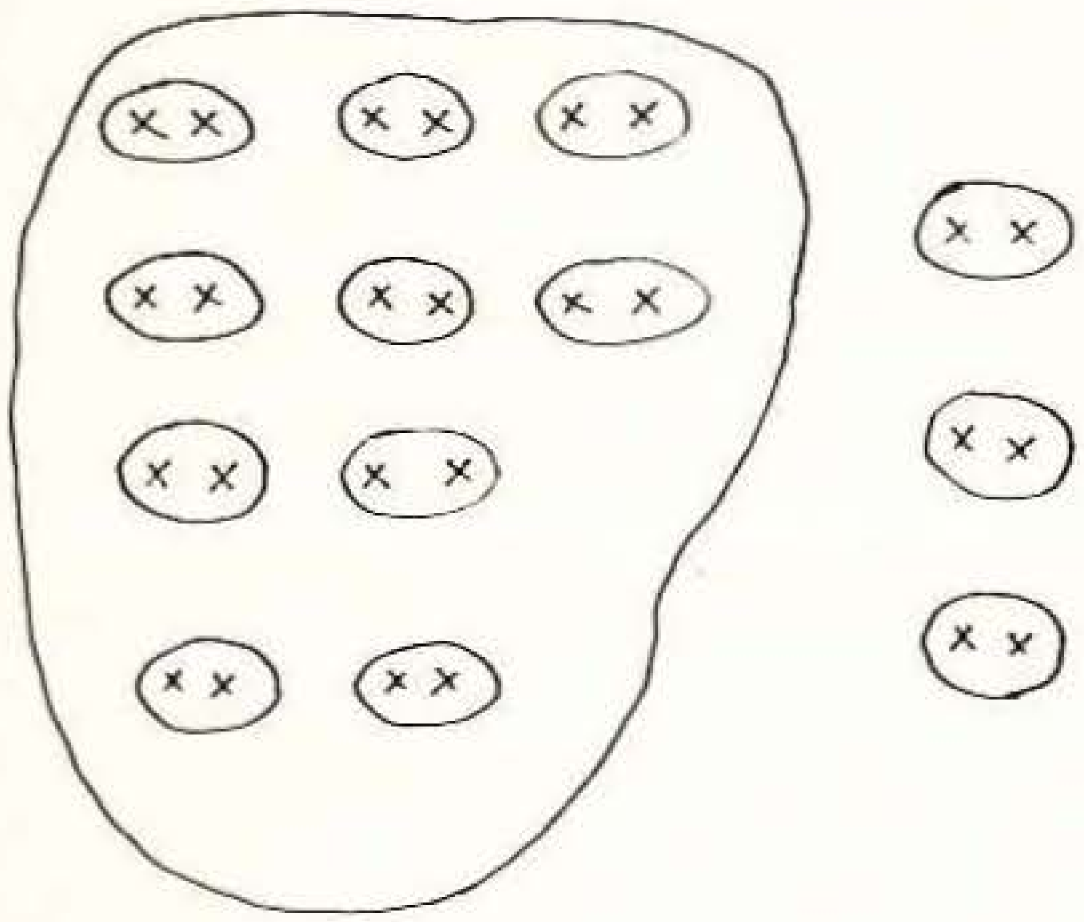
2 *douzaines et* 2 *œufs*
nouveau code : 10 *œufs* → $\boxed{\text{1 } dizaine}$
j'aurai



2 *dizaines et* 6 *œufs*
Donc le cardinal 26 peut s'écrire :
4 six et 2 en base 6
2 douze et 2 en base 12
2 dix et 6 en base 10
Cette comparaison ne se fera que sur des groupements du 1er ordre. Elle sera amenée naturellement surtout si l'on est amené à comparer le travail individuel de plusieurs enfants (chaque enfant n'ayant pas forcément groupé dans la même base).

Base 2 *et Base* 10 :

Ceci n'est pas faux si l'on considère que le 1[er] groupement a été fait en base 2 et le 2[e] groupement en base 10 (groupements irréguliers). Je peux très bien concevoir ceci :



10 (xx)	(xx)	x
1	3	0

Pourquoi compter en d'autres bases que 10?
La numération décimale est tellement habituelle qu'il est très difficile de comprendre sa formation, nous n'en voyons pas la nécessité. Compter dans d'autres bases, créer d'autres systèmes de numération nous aide à mieux comprendre la formation du système que l'on emploie dans la vie courante.
Mais dans la vie, nous n'employons d'ailleurs pas toujours le système décimal : pensons aux heures, aux machines à calculer, aux ordinateurs.

LIVRETS PROGRAMMÉS

Une autre formule pour le travail individuel, sur le même principe que les bandes programmées, avec plages demandes, plages réponses, plages ouvrant des pistes de recherche...

Un complément au calcul vivant permettant aux enfants de travailler individuellement sur des situations mathématiques (et en particulier numériques) courantes en respectant au maximum les divers modes de raisonnement.

Ces livrets sont groupés par séries de 10 sur un même concept mathématique :

Série C.3 (0 à 9) Application linéaire
Série B.1 (0 à 9) Ensembles-relations. (à paraître)

Tous autres renseignements : CEL - BP 282 - 06 - *CANNES*

VII OPÉRATIONS SUR LES CARDINAUX - L'ADDITION

Le nouveau programme limite à l'addition, l'étude des opérations (techniques opératoires) au CP. Ceci nous démontre l'inutilité entêtée du travail mécanique que nous essayions d'imposer aux enfants sans résultats effectifs et durables. Mais d'autre part il ne faudrait pas croire qu'il ne faille pas aborder les notions de partage, de différence, etc. sous prétexte que ce n'est pas au programme. Seulement il ne faudra pas imposer la loi et une technique opératoire. Les opérations sur les ensembles (réunion, complément, différence), les divers groupements en numération nous permettront de les aborder.

A) Différents cas d'addition

Elle peut être abordée de deux façons, les confondre est pour les enfants une cause d'incompréhension.
L'enfant fait la différence entre les 3 situations suivantes.

a) *J'ai 3 lapins dans une cage, 6 dans une autre, je les mets ensemble.*

b) *Il y avait 3 lapins dans la cage, maman en ajoute 6 qu'elle a achetés au marché.*

c) *Dans le clapier il y a une cage avec 3 lapins et une cage avec 6 lapins.*

Ces 3 situations se traduisent en math traditionnelle par

$$3 + 6 = 9$$

Or elles font appel à des notions mathématiques tout à fait différentes.

dans *a* c'est *la réunion d'ensemble*

$$(3, 6) \xrightarrow{\oplus} \boxed{3+6} \text{ ou } 9$$

dans *b* c'est *la notion d'opérateur*

$$3 \xrightarrow{+6} 9$$

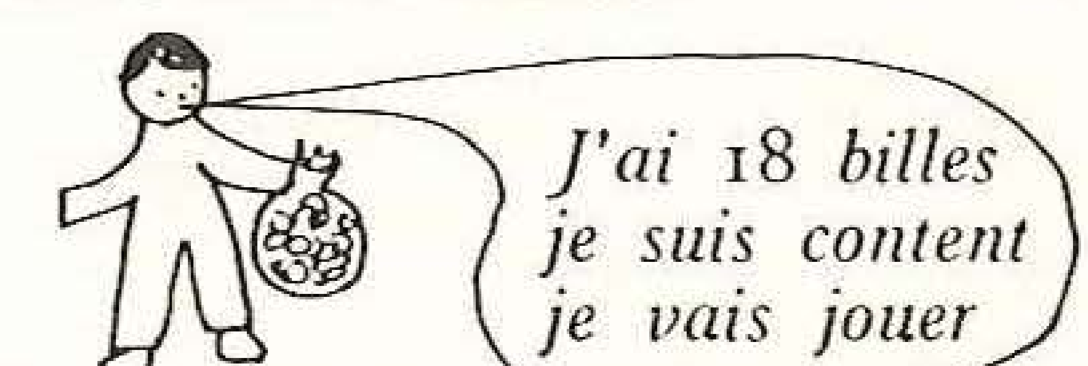
dans *c* c'est *la notion de couple*

$$(3, 6)$$

La différence fondamentale paraît être celle qui existe entre la réunion d'ensemble et la notion d'opérateur.

B) Opérateur et opération

Je gagne des billes
Jean-Paul se dessine

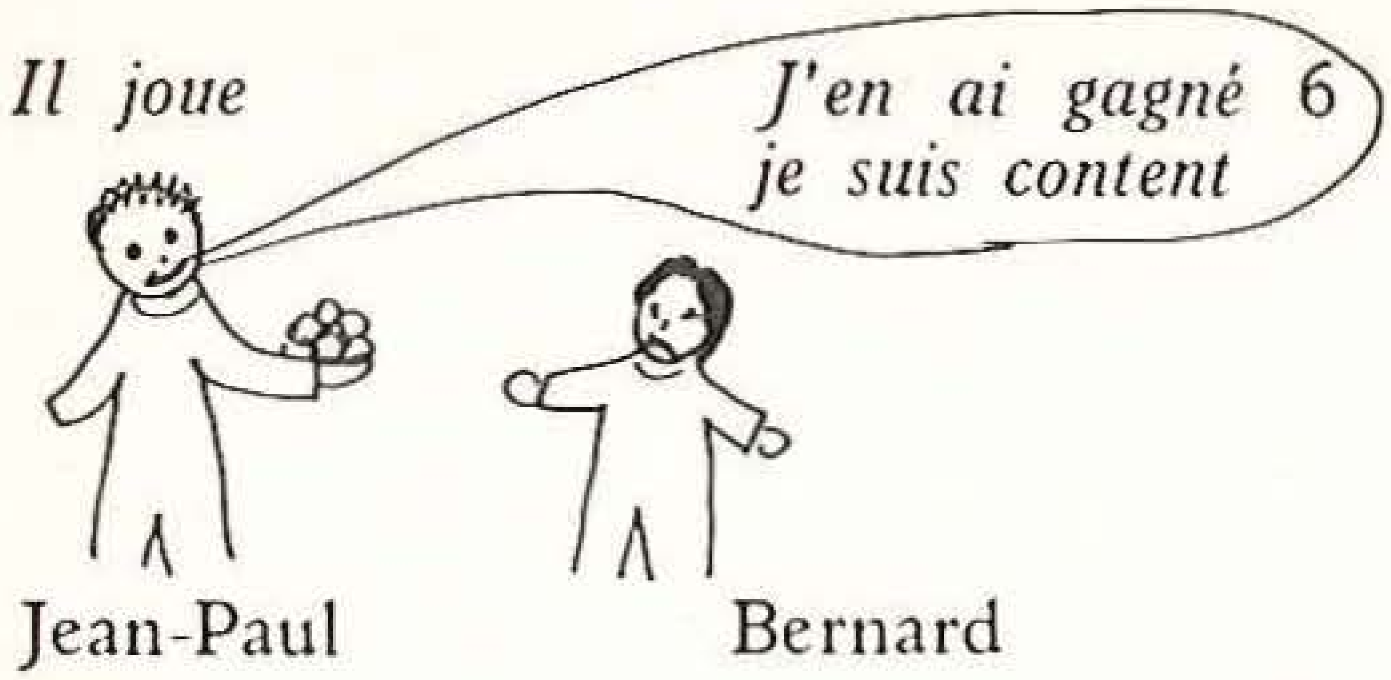


18 billes est l'*ensemble départ*

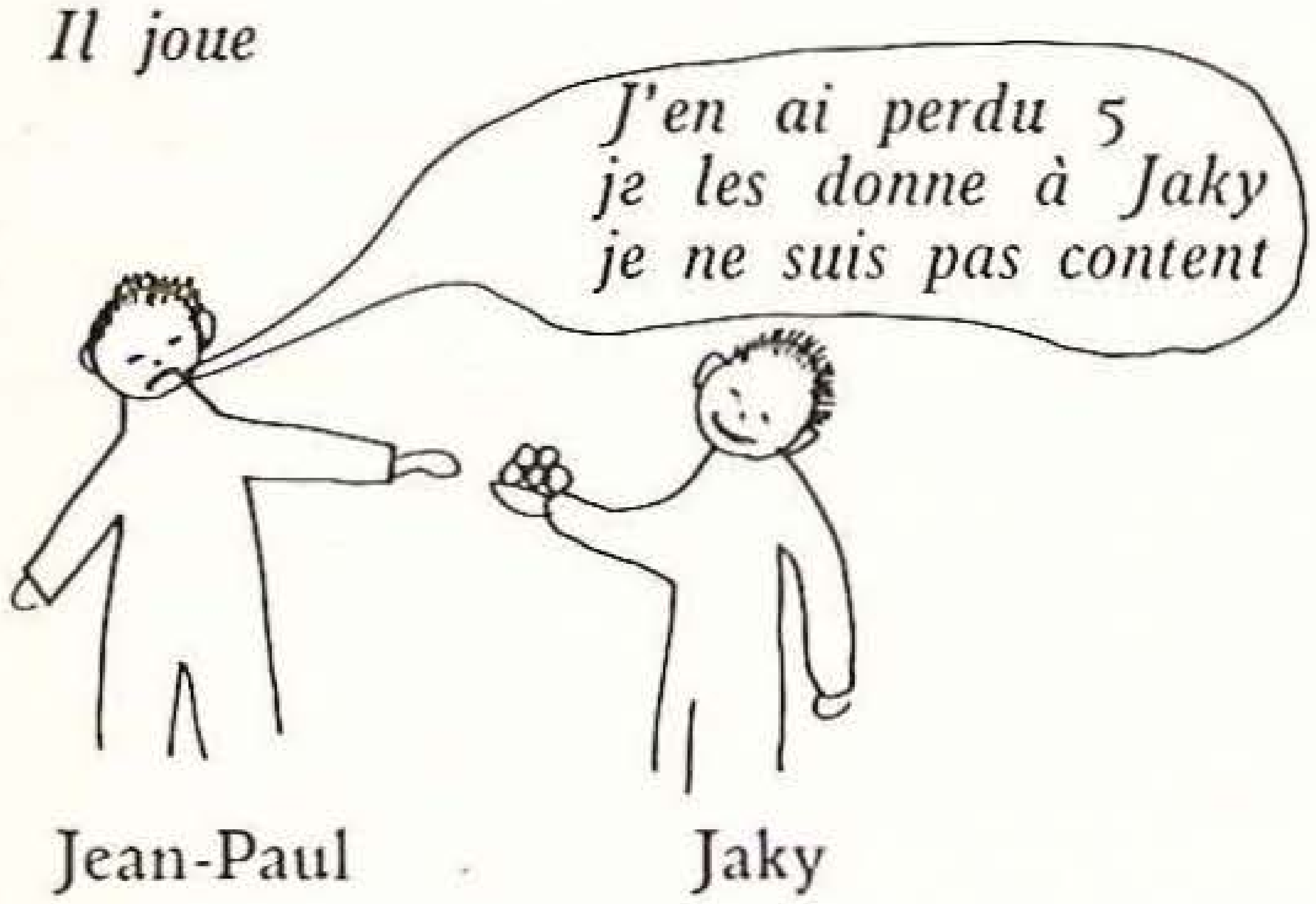
Il joue

Jean-Paul Marc

Il joue



Il joue



Après la récré, Jean-Paul fait ses comptes. Pour cela, il récapitule ses différentes *actions* et dit :

« *J'en ai gagné 3 à Marc, 6 à Bernard mais j'en ai donné 5 à Jaky. J'en ai gagné 4.* »

Ce qui intéresse Jean-Paul ici ce sont ses actions, à aucun moment n'interviennent les 18 billes.

L'ensemble départ est ici indépendant. Jean-Paul travaille sur des actions, sur des *opérateurs*.

S'il prend pour code

$$\left.\begin{array}{l} \text{gagne} \longrightarrow + \\ \text{perd} \longrightarrow - \end{array}\right\} \text{symbolisation}$$

Jean-Paul peut écrire

$$\boxed{+3 \text{ et } +6 \text{ et } -5 = +4}$$

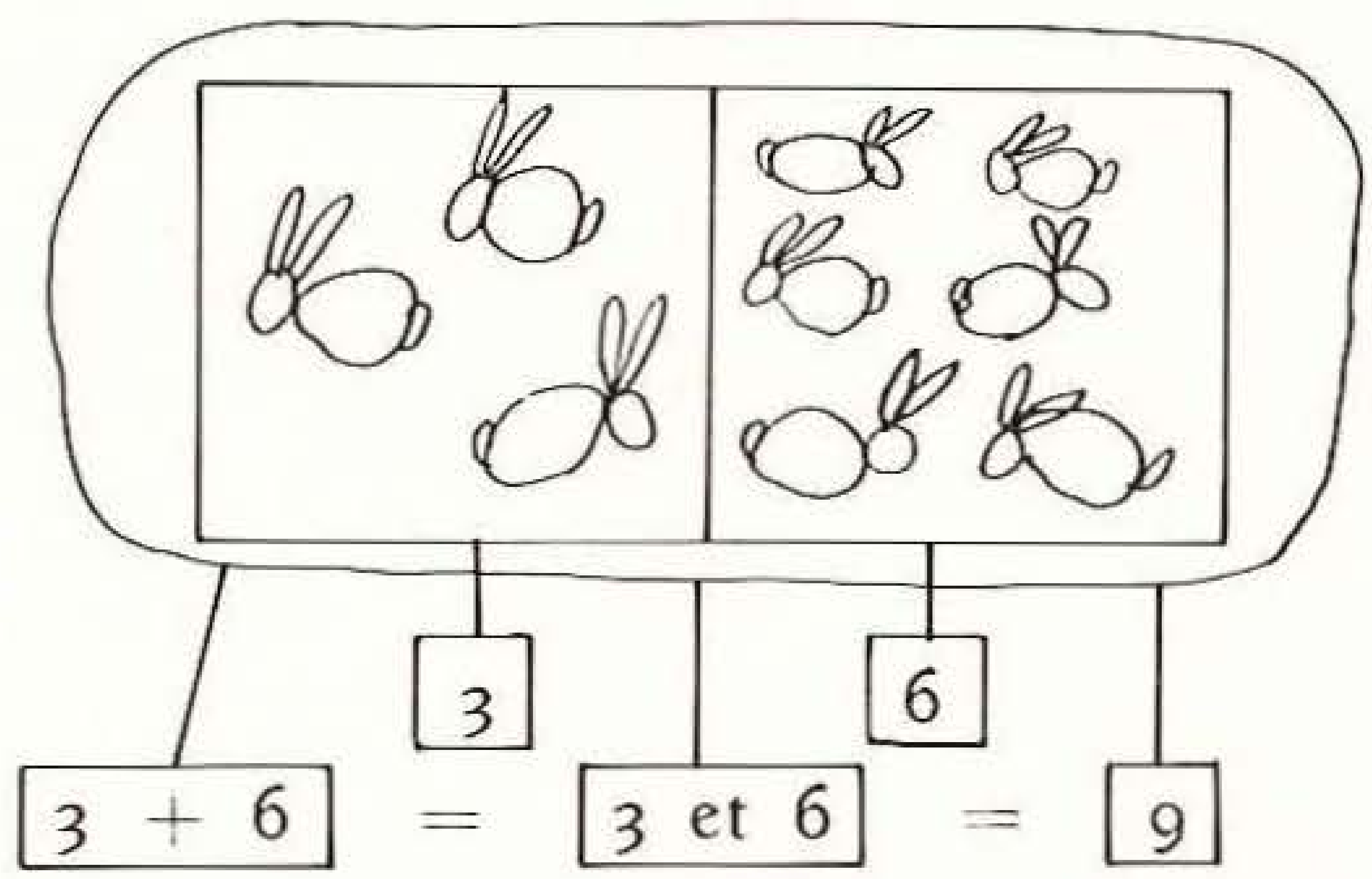
C) Le signe

Il faut bien faire la distinction entre les (+ —) qui symbolisent des actions et le (et) qui est une coordination que l'on a l'habitude par continuité de traduire aussi par + (ce qui crée une ambiguïté dans l'esprit des enfants).

En algèbre ce (et) n'est pas écrit. Cette distinction fondamentale doit être faite clairement car les enfants s'y heurtent.

Pour eux le (+) correspond à une action et non à une coordination.

Il faut faire la distinction entre (+ 3) qui est un opérateur et le terme (3) du couple (3,6) dans l'exemple suivant :



$\boxed{3 + 6} = \boxed{3 \text{ et } 6}$ sont des *nombres* égaux à 9.

(3,6) n'est pas un nombre c'est un couple. Tant que j'en suis à (3,6) je n'ai pas opéré (c'est le *cas c*, dans le clapier il y a une cage avec 3 lapins et une cage avec 6 lapins).

Si je mets ensemble les lapins, je réunis, *j'opère sur le couple* (3,6) (*cas a*)

$$(3,6) \xrightarrow{\oplus} \boxed{3 \text{ et } 6} \text{ ou } \boxed{3+6} \text{ ou } 9$$

3 + 6
3 et 6
9

sont les différentes écritures d'un même nombre ce sont des résultats

$\boxed{3 + 6}$ *n'indique pas une opération à effectuer,* elle est déjà faite.

A différencier de

$$3 \xrightarrow{+6} 9$$

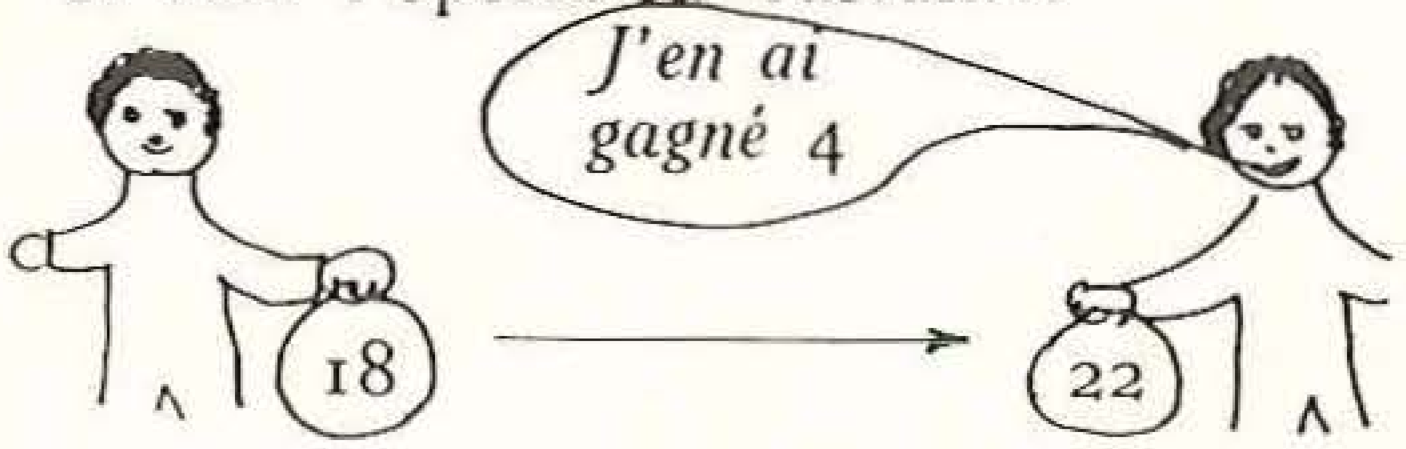
qui indique une opération sur le 3 (+ 6) étant l'opérateur
(*cas b* maman achète 6 lapins...)

Remarque :
Dans la réunion d'ensembles, les enfants disent naturellement *et.* Il est difficile de faire admettre que ce *et* peut se symboliser par +. Ils n'en voient pas l'utilité et même s'y opposent en disant « ce n'est pas la même chose ».

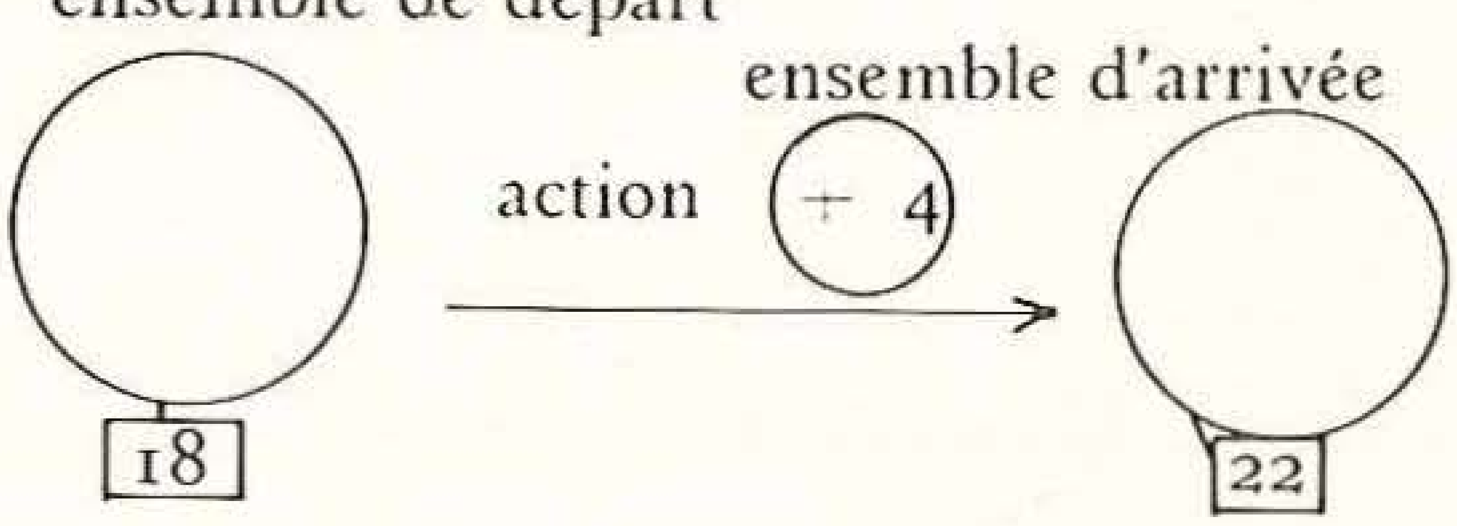
D) Représentations diverses

Si nous reprenons l'exemple des billes, Jean-Paul peut savoir combien il a de billes dans son sac *après le jeu.*

Il fera l'opération suivante.



ensemble de départ



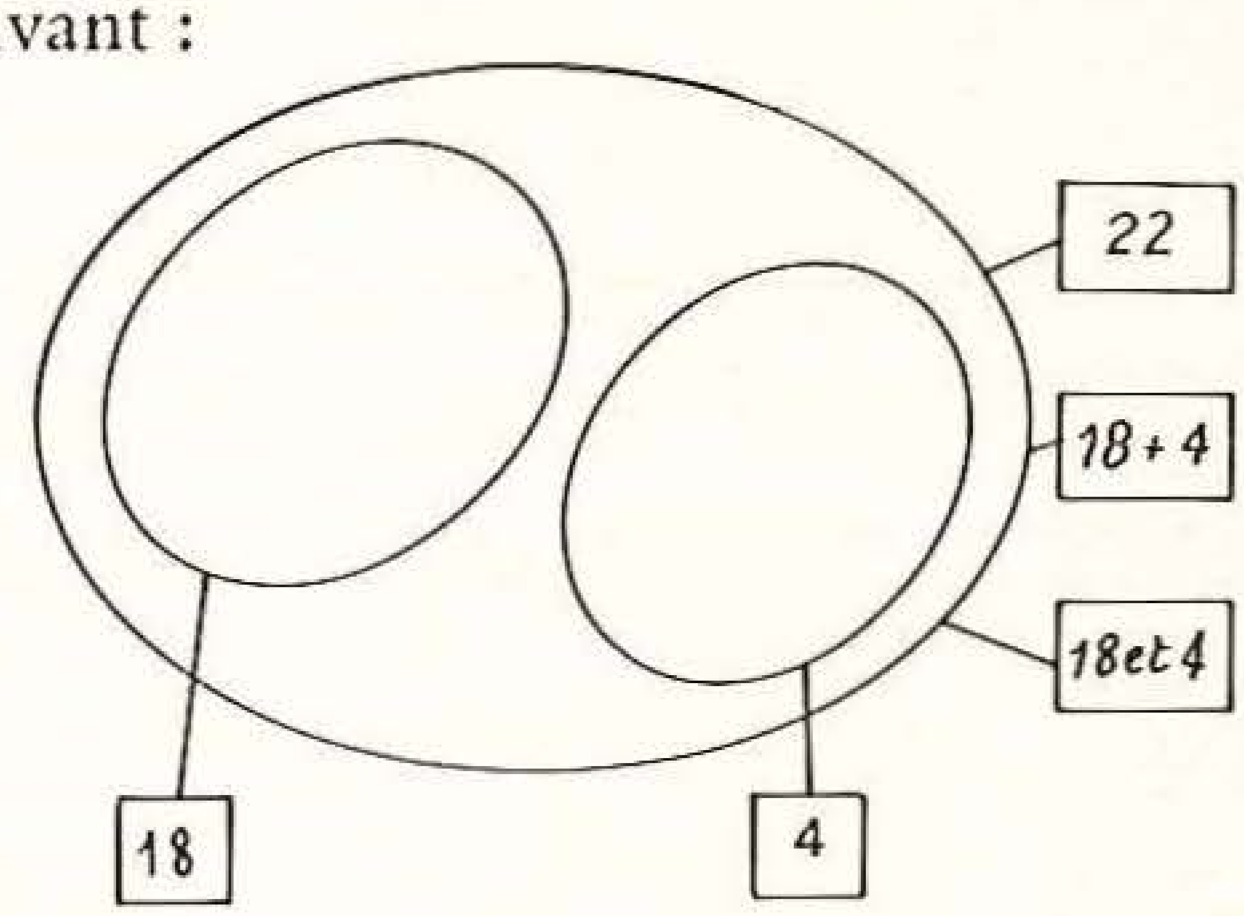
état initial état final

ou 18 et (+ 4) = 22

$$18 \xrightarrow{+\ 4} 22$$

opération sur un nombre (18)

A ne pas confondre avec le diagramme suivant :



qui se traduira

$$(18{,}4) \xrightarrow{+} 22$$

opération sur un couple

(ce diagramme peut correspondre à la situation : Jean a 18 billes Paul 4. En tout il y a?)

E) Techniques opératoires de l'addition

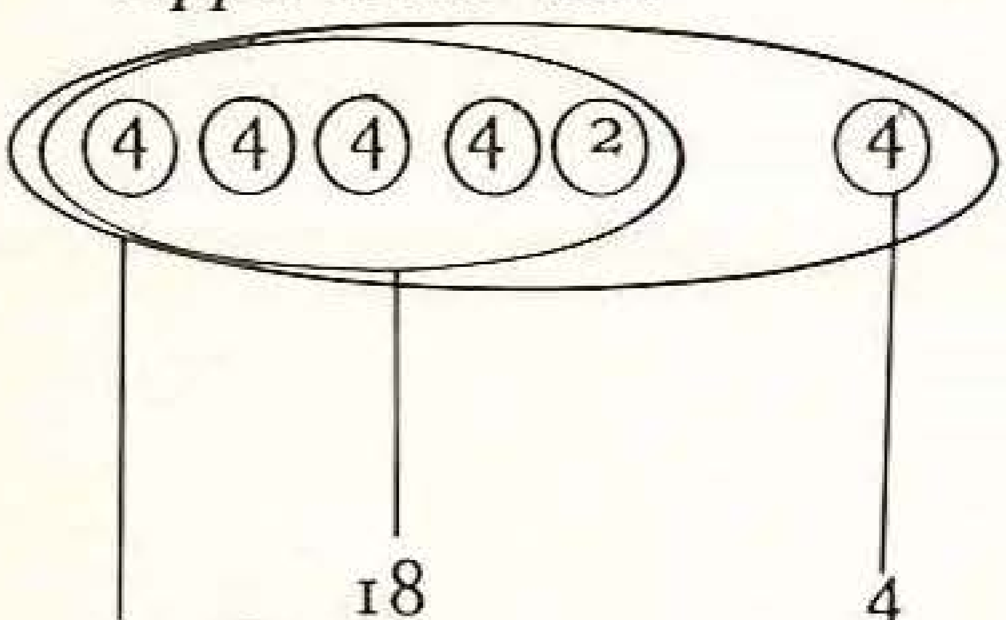
Pour réaliser techniquement 18 et 4 nous devons *faire appel à la numération.* Il n'existe pas *une* technique opératoire. Chaque enfant peut avoir la sienne adaptée à sa propre vision des choses. Nous n'avons pas le droit d'en imposer une sous prétexte que c'est celle que tout le monde connaît et qu'on la croit la plus efficace. Nous avons là une des causes de blocages nombreux. La prédominance de la base 10 et la mécanisation des techniques ont tué le calcul mental qui, lui, fait appel, parce que plus individuel, à des circuits beaucoup plus divers.

Pour 18 et 4 voici quelques exemples

18 et 2	et 2	22
8 et 4	et 10	22
15 et 4	et 3	22
18 et 5	moins 1	22
18 et 8	moins 4	22
18 et 1	et 1 et 2	22
16 et 4	et 2	22

Appel à une base

base 4

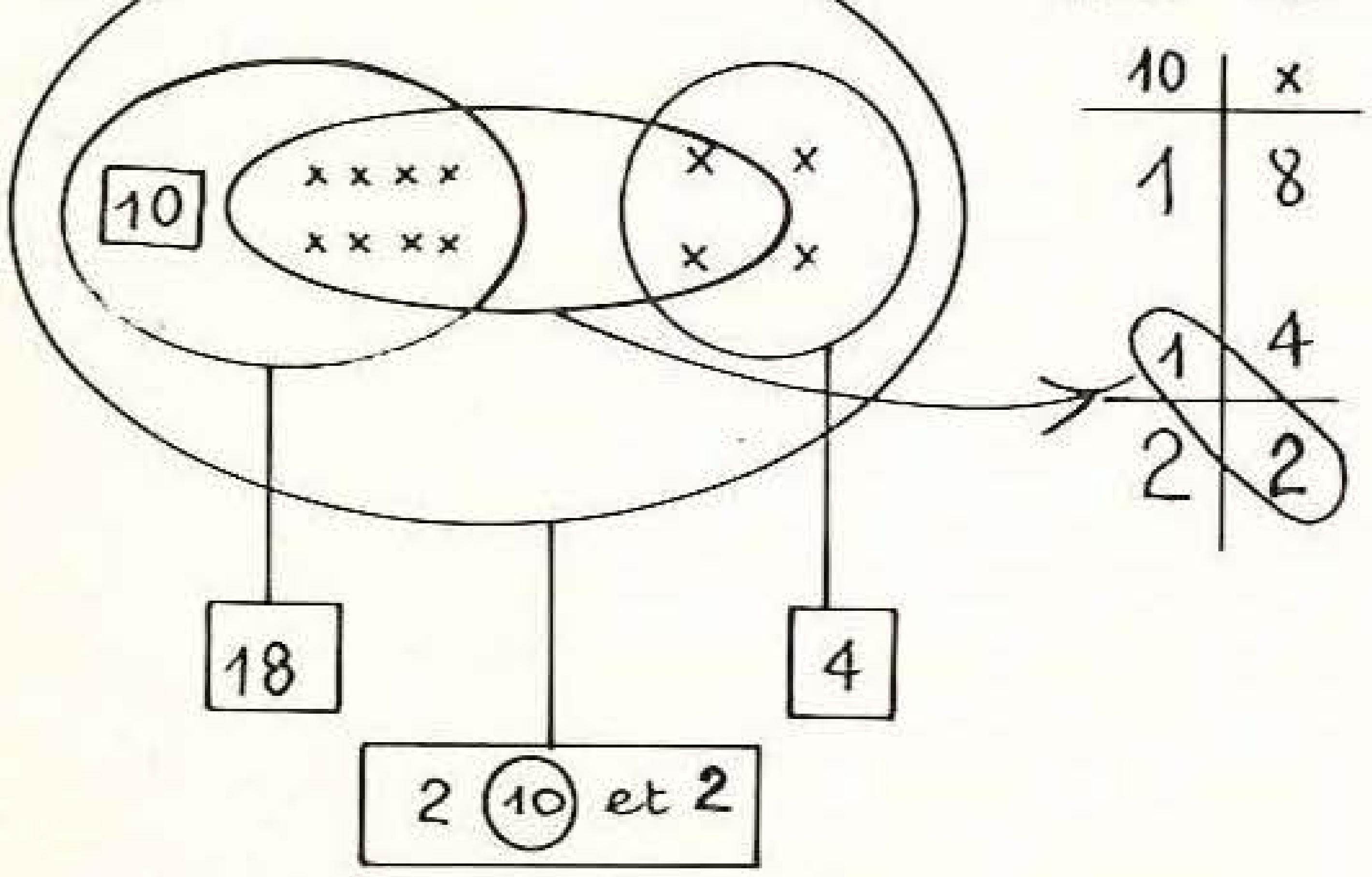


18 4

5 4 et 2

5 × 4 20 et 2 22

base 10



La création d'une technique opératoire nécessite avant tout la connaissance de l'opération que l'on veut faire. C'est pour l'addition, connaître d'abord ses diverses propriétés, faire appel à telle ou telle propriété entraînera telle ou telle technique.

* dire 4 et 8 au lieu de 8 et 4 c'est utiliser *la commutativité* de l'addition
$(a + b) = (b + a)$

* dire (16 et 4) 20 et 2 = 22
ou (4 et 2) 6 et 16 = 22
c'est faire appel à une autre propriété de l'addition : l'*associativité*
$(a + b) + c = a + (b + c)$

On peut toujours remplacer dans l'addition un ensemble par un autre ensemble équivalent du moment que l'on ne s'intéresse qu'à la propriété numérique.

C'est aussi avoir conscience que chaque chiffre, de droite à gauche, représente le nombre d'ensembles d'un certain ordre, les ordres croissant de droite à gauche. L'enfant ne peut donc faire et comprendre une addition que s'il est en parfaite possession de la numération.

Il faut qu'il sache utiliser *le zéro qui est neutre pour l'addition* correspondant à un ensemble vide
$(a + o = a)$

Soyons persuadés que si l'enfant n'a pas compris, découvert, assimilé ces différentes notions « *il ne servira à pas grand chose,* comme le dit Dienès, *de lui faire exécuter un grand nombre d'« additions » même par l'emploi d'un matériel concret le plus moderne. Il faut beaucoup moins de pratique qu'habituellement, pour aboutir à une technique efficace quand les principes sont correctement compris.* »

VIII L'EXPLORATION DE L'ESPACE

Dès son plus jeune âge, l'enfant explore l'espace. Il regarde, il tâte, il touche puis il se meut, il se déplace. Il part à la conquête du monde qui l'entoure. Il fait son expérience tâtonnée.

Ce qui compte ce ne sont pas les objets ou les personnes dans leur froide réalité mais les rapports qu'il peut avoir avec eux, ce qu'il peut en faire.

Il cherche à les faire siens en les passant au crible de son affectivité.

L'enfant n'a pas une vision d'adulte, ses besoins ne sont pas ceux des adultes. Nous sommes souvent étonnés au CP de découvrir que des notions que nous jugeons simples telles que *devant, derrière, dedans, dehors, avant, après...* ne sont que très imparfaitement assimilées. C'est qu'elles ne sont nullement prioritaires pour le très jeune enfant. Elles ne le deviennent que quand l'enfant apprend à lire et à écrire, quand il lui faut se situer ou situer un objet par rapport aux autres.

Ce qui est vital au départ ce sont ses déplacements dans l'espace afin d'agir sur celui-ci et d'obtenir ce qu'il désire.

La notion de voisinage, les frontières, l'idée du trou, du passage, de la continuité, l'étude de toutes ces notions fondamentalement premières sont l'objet de la topologie.

A) La topologie

On peut définir la topologie avec certains auteurs comme « *une géométrie de forme primitive et rudimentaire sous-jacente à toutes les géométries* ». De ce fait, il est possible de la discerner dans les actions et réflexions des enfants.
L'une des notions fondamentales qu'elle aborde est celle de continuité et, pour ce faire, étudie les notions de voisinage, d'ensembles ouverts et d'ensembles fermés, de frontière.

VOISINAGE :

La table de Christine est bien en désordre.

— *Je vais*, dit-elle, *ranger ma place. Je m'assieds, et je range tout ce que je peux attraper avec ma main.*

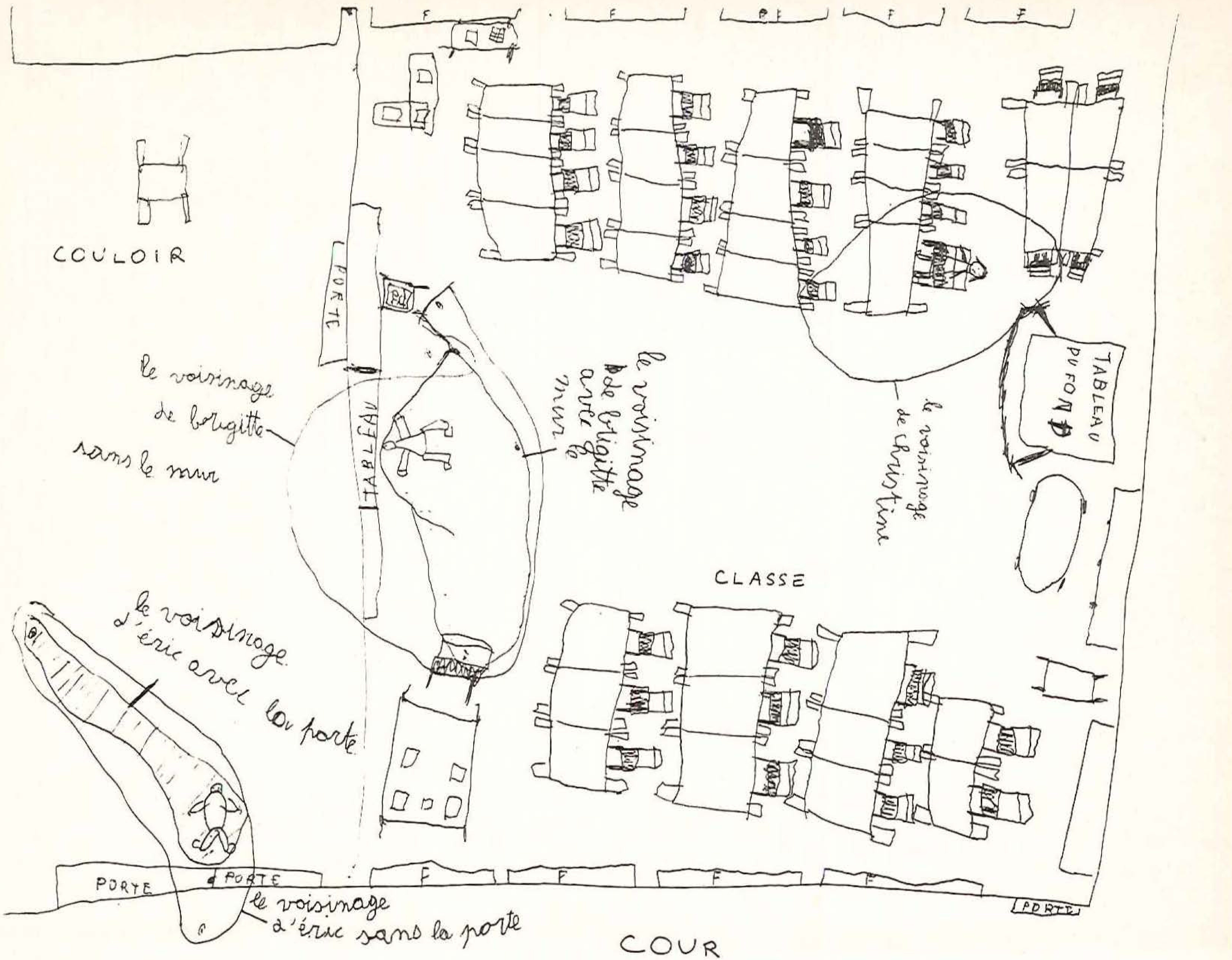
— *Dois-tu ranger ton sac, qui est contre le pied de ta chaise ?*

— *Oui, parce que je peux le toucher. J'y arrive, alors le sac est dans mon voisinage.*

— *Et la mouche qui vole sur ta tête ?*

— *Si elle volait moins vite, je pourrais l'attraper. Je devrais la ranger, elle aussi. Elle est dans mon voisinage.*

Christine a délimité intuitivement son voisinage. Ce sont tous les points qui se trouvent à l'intérieur de la sphère qui a pour rayon la longueur de son bras.


COULOIR
PORTE
TABLEAU
le voisinage de brigitte sans le mur
le voisinage de brigitte avec le mur
le voisinage de christine
TABLEAU DU FOND
CLASSE
le voisinage d'éric avec la porte
PORTE
PORTE
le voisinage d'éric sans la porte
F
PORTE
COUR

On voit que l'exploration du voisinage permet de déterminer la position relative de ses points. L'enfant peut ainsi préciser et affiner sa connaissance de termes tels que :

sur - sous - à gauche - à droite - devant - derrière - à l'intérieur - à l'extérieur - en haut - en bas - etc.

La maîtresse, à Brigitte qui est près du tableau mural :

— *Tu parles bien fort, Brigitte! De qui veux-tu ainsi te faire entendre?*

— *Je parle à mes voisins qui sont debout près du tableau.*

— *Tu veux sans doute aussi parler à André, qui est de l'autre côté du mur, dans le couloir?*

— *Oh! non! Je ne peux pas parler à André, il ne m'entendrait pas. Il faudrait que je sois près de la porte pour qu'il m'entende!*

Olivier :
— *Il faudrait même que la porte soit ouverte. Si la porte était ouverte, André serait ton voisin, mais si la porte est fermée, André n'est plus ton voisin.*

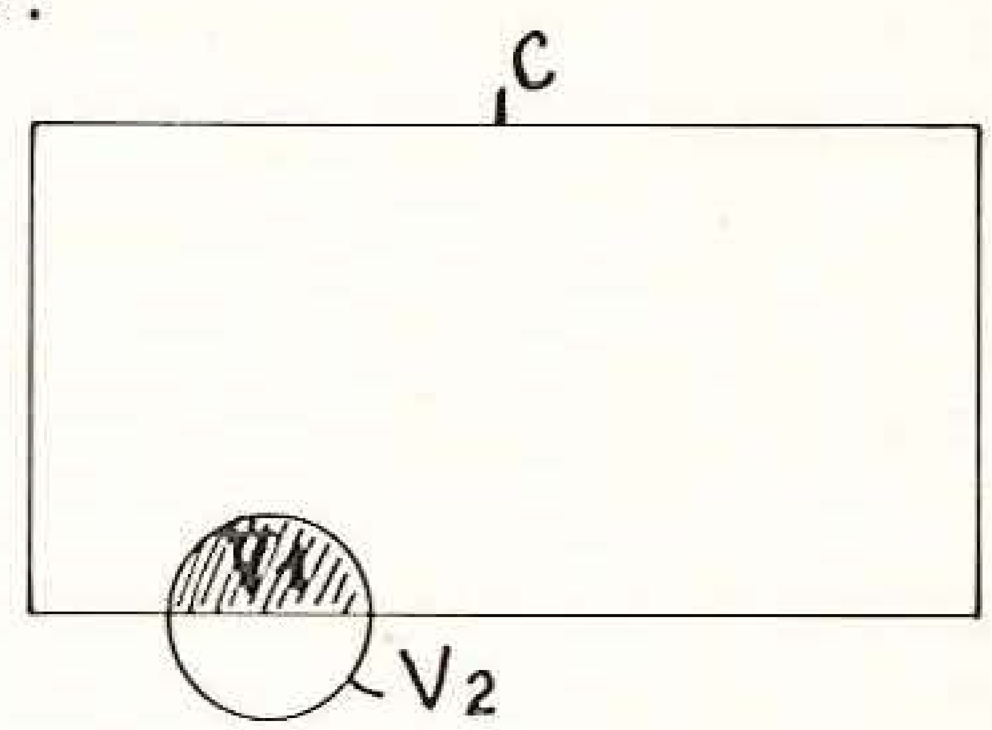
Olivier a essayé de dessiner les différents voisinages. Il a d'abord dessiné le voisinage le plus facile, celui de Christine. Ensuite, il a représenté le voisinage d'Eric lorsque celui-ci se trouve près de la porte de sortie de la classe.

Eric a deux voisinages, selon que la porte est ouverte ou fermée. A l'aide de l'exemple d'Eric, il a conclu que Brigitte a aussi deux voisinages :

— *le voisinage de Brigitte lorsque le mur existe,*

— *le voisinage de Brigitte si le mur n'existait pas.*

Apparaît d'ailleurs une relation entre les deux voisinages, que le dessin, quoique schématique, met en évidence :



Le voisinage d'Eric avec la porte est égal à l'intersection du voisinage d'Eric sans la porte avec la classe.

Soient :
C l'ensemble des points de la classe,
V_1 le voisinage d'Eric avec la porte,
V_2 le voisinage d'Eric sans la porte,
on a : $V_1 = C \cap V_2$

Ensemble ouvert, ensemble fermé :

En promenade, on est arrivé devant un pré clôturé. Guy explique :

— *Pour moi, le pré est ouvert, il n'est pas fermé, parce que je peux passer à quatre pattes sous le fil de fer.*

— *Pourtant, pour les vaches, il est fermé,* rectifie Fabienne.

— *Pour nous, le pré est ouvert, pour les vaches, il est fermé.*

A la fin de la promenade, on a trouvé la porte de la classe fermée à clé.

— *Et maintenant, Guy, peux-tu rentrer?*

— *Non, la classe est fermée, et les murs m'empêchent d'y entrer.*

Dans le pré, nous avons pu ne pas tenir compte de la clôture. Pour entrer en classe, il faut tenir compte des murs.

Ensemble ni ouvert, ni ferme :

On joue aux gendarmes et aux voleurs. Quand un voleur est pris, on le mène en prison. La prison, c'est le bac à sable.

Jean-Luc a été pris, mené en prison, mais il s'est échappé.

— *Tu n'as pas le droit de t'échapper de la prison!*

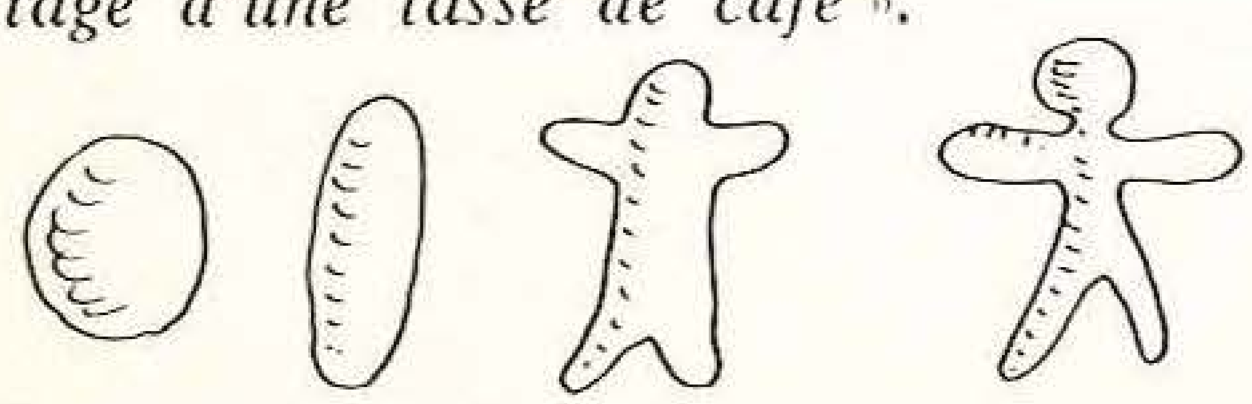
— *Mais elle n'a pas de mur, cette prison! Quand vous m'y avez amené, il n'y avait pas de mur!*

— *Oui, mais maintenant, il y a un mur! Tu ne peux pas t'échapper!*

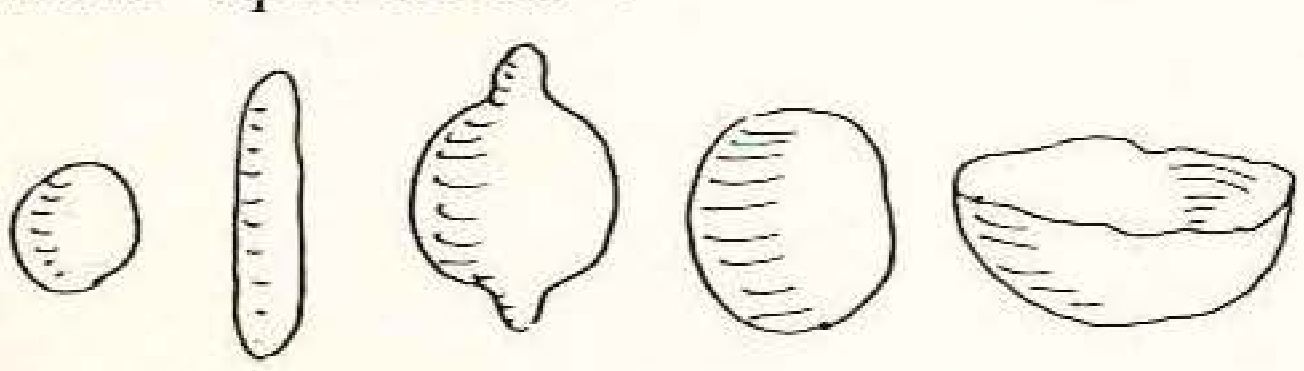
La prison, ouverte quand on veut y rentrer, fermée quand on veut en sortir, n'est ni ouverte, ni fermée.

Continuite :

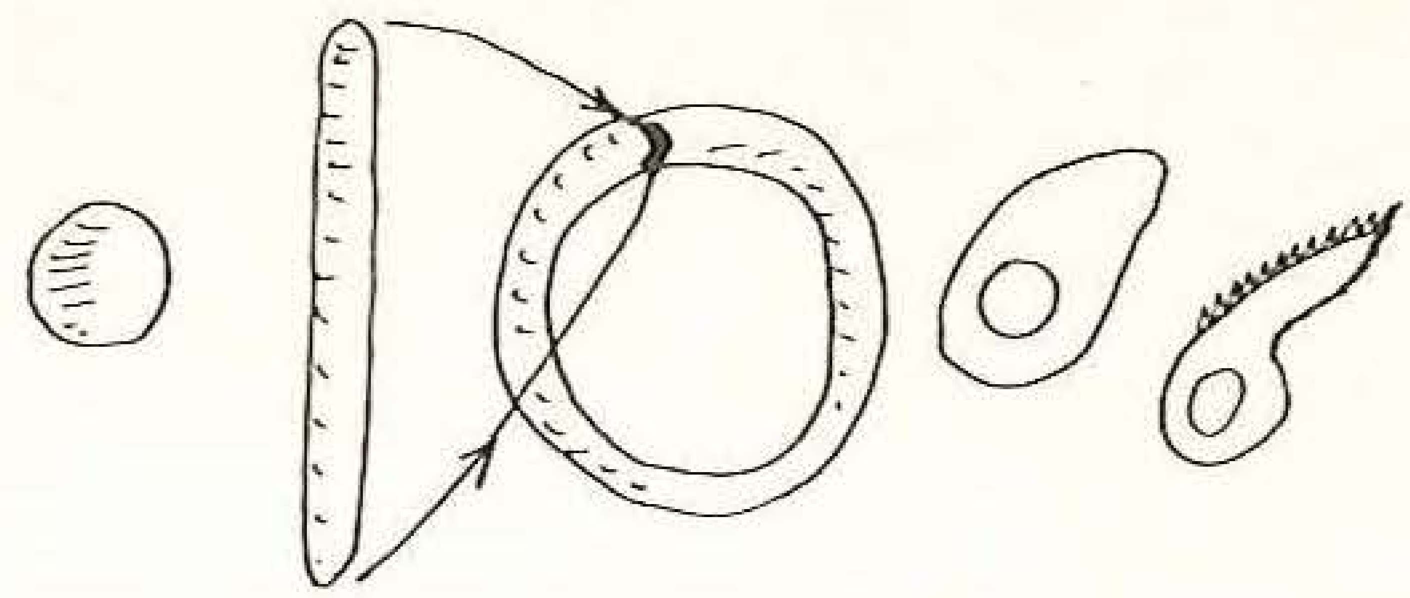
Voici, réalisées par quelques enfants, à partir d'une boule de terre, des transformations continues, bijectives, appelées homéomorphismes. Elles illustrent cette citation amusante : « *Un topologiste est un mathématicien qui ne sait pas distinguer une bouée de sauvetage d'une tasse de café* ».



La transformation d'Olivier : le bonhomme et la boule sont « *topologiquement équivalents* ».



La transformation de Régis : *équivalence topologique entre la corbeille et la boule.*

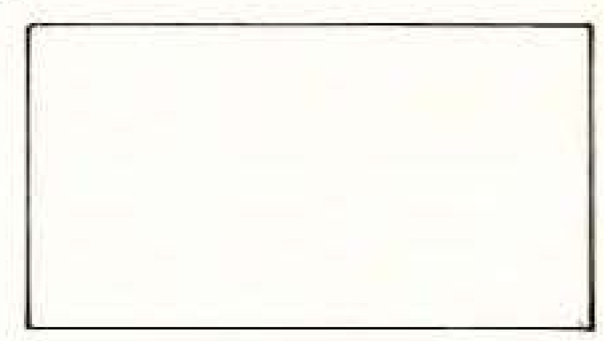


La transformation ci-dessus n'est pas un homéomorphisme, car le collage empêche que la transformation soit bijective.

Formes geometriques

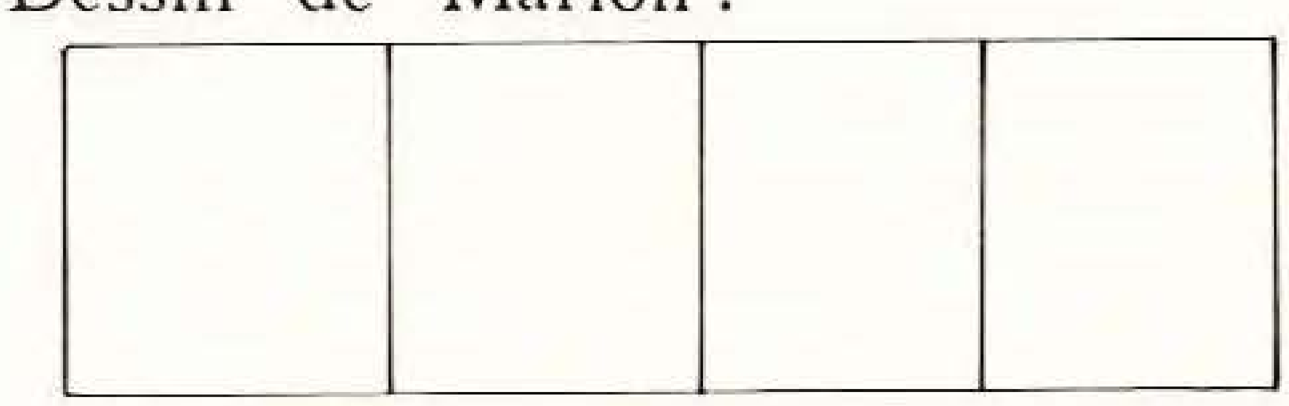
Dominique nous parle des murs de sa chambre. Nous essayons de les dessiner en observant les murs de la classe. Chaque dessin est ensuite critiqué.

Jean-Michel a représenté chaque mur par une ligne, or :



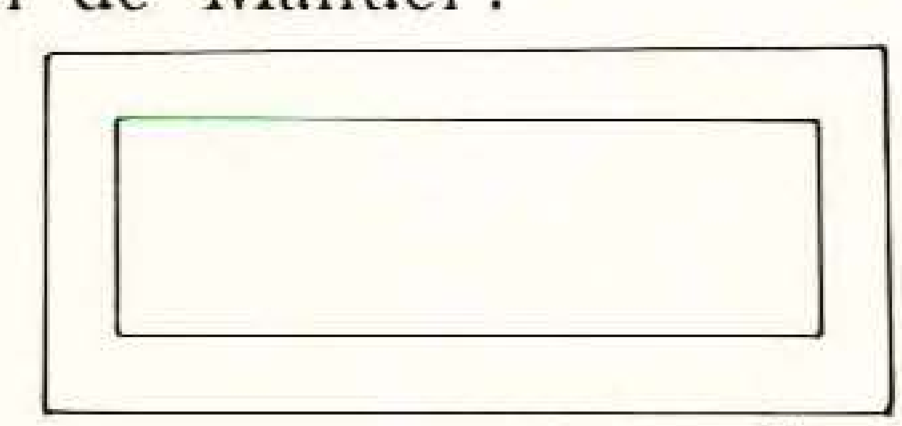
— un mur n'est pas une ligne, il est plat.

Dessin de Marion :



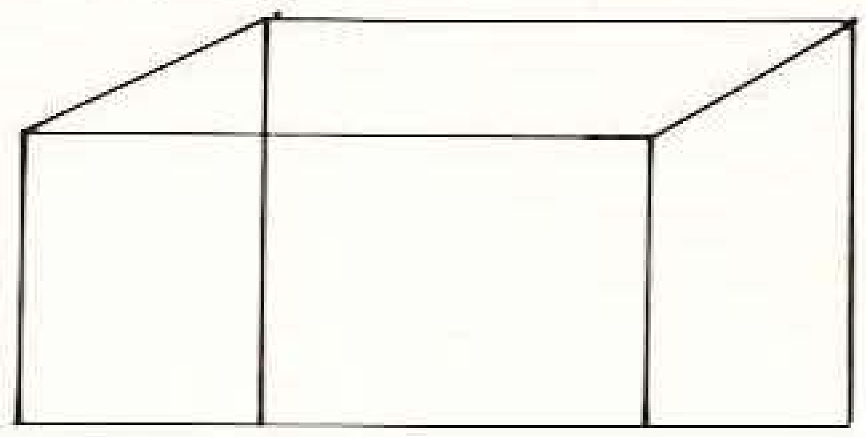
Les quatre murs sont représentés en surface, mais la classe n'a plus sa forme.

Dessin de Manuel :



Les quatre murs sont représentés en épaisseur, mais l'épaisseur ne se voit pas.

Dessin de Sylvie :



Elle essaie de rendre la profondeur (3^{e} dimension) par un dessin rappelant celui du cube.
Après discussion, c'est celui qui est adopté.

B) Déplacements, symétrie, rotation

Ce n'est qu'après avoir abordé plus ou moins intuitivement ces notions topologiques que l'enfant s'intéresse aux mouvements qui transforment les choses. Nous aborderons ainsi, après l'étude de divers déplacements, les notions de symétries et de rotations.

LES DEPLACEMENTS :

L'éducation corporelle nous sera d'un grand secours pour l'apprentissage de ces concepts mais il ne faudra pas s'arrêter à une prise de conscience intuitive du concept, il faudra essayer de représenter la situation, ici l'action, le mouvement, le symboliser.

Alain raconte : *Hier, j'ai descendu la dune du Pyla en faisant le « roule barrique ».*

Le maître : *Montre comment tu fais.*

Alain : *Je ne peux pas, je n'ai pas la dune.*

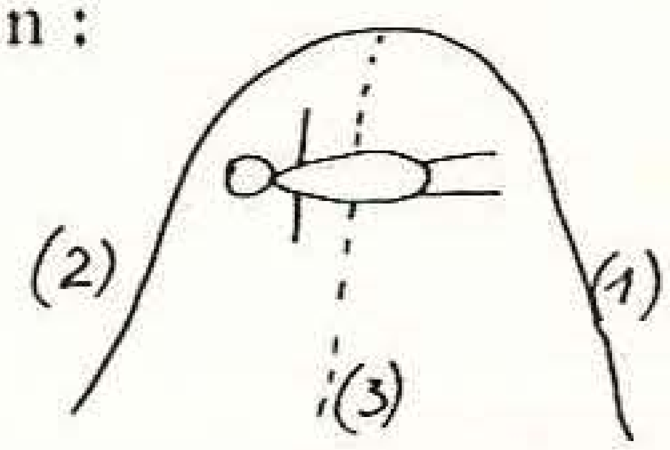
Nous recréons la situation avec les moyens du bord. Nous faisons un plan incliné avec le grand panneau de calcul et le banc.

Eric dit à Alain : *La dune ça descend plus mais ça doit marcher ; monte et roule.* (notion de pente)

L'expérience réussit. Alain refait son « roule barrique ».

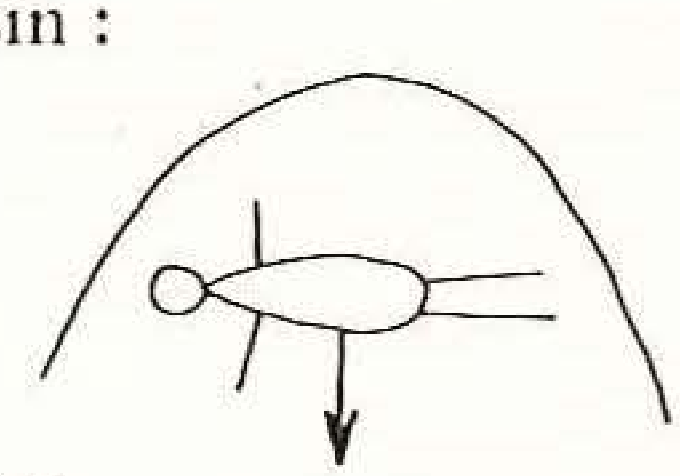
Nous essayons de dessiner pour les correspondants.

1er dessin :



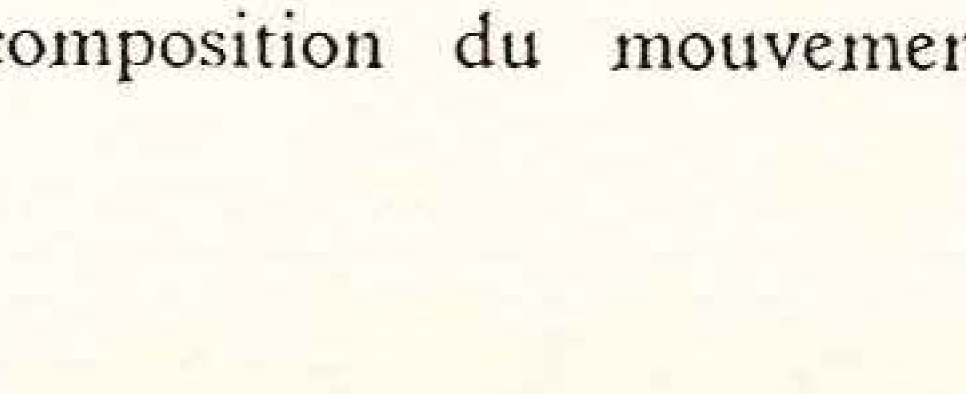
Critique :
— *Il n'est pas sur la pente. La pente c'est là* (1).
— *Ou là* (2).
Alain : *La pente, c'est partout sauf en haut et en bas ; le bonhomme est sur cette pente* (3).
Eric : *Oui, mais ton bonhomme il ne descend pas.*

2^{e} dessin :



Critique :
— *Il descend mais il ne roule pas, il glisse* (nous essayons de faire le mouvement indiqué par la flèche).
Alain refait sa roulade lentement en disant : *Je suis sur le dos puis sur le côté droit puis sur le ventre puis sur le côté gauche puis sur le dos.*

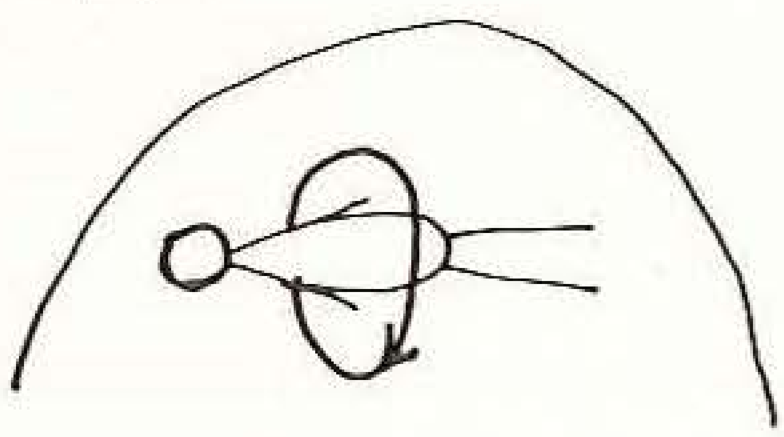
3^{e} dessin :



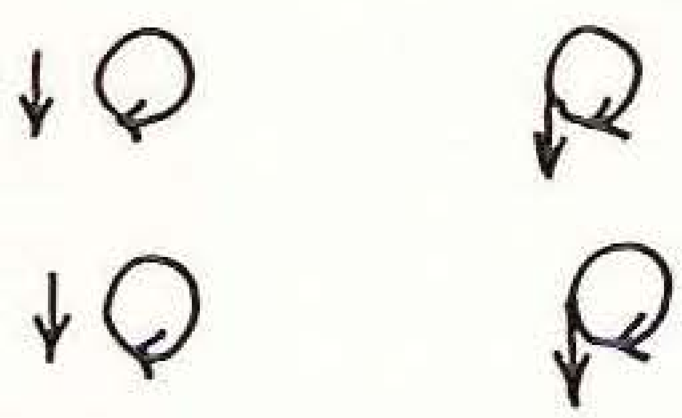
(décomposition du mouvement)

Critique :
— *Oui mais tu as 5 bonshommes.*
— *Mais c'est le même qui roule ; il fait çà* (geste).
Le maître : *Montre avec une flèche.*

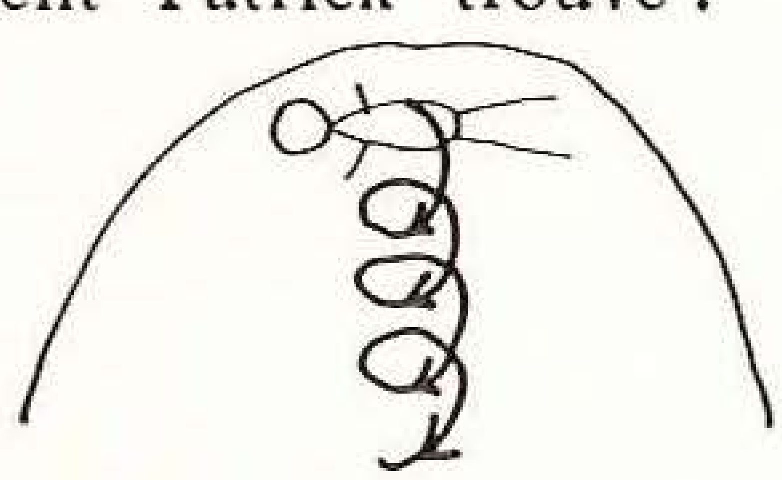
4e dessin :



Critique :
— *Oui il roule mais il ne descend pas. Il faut les 2 flèches.*
D'où divers essais accompagnés de gestes.



Il fait les deux en même temps. Finalement Patrick trouve :

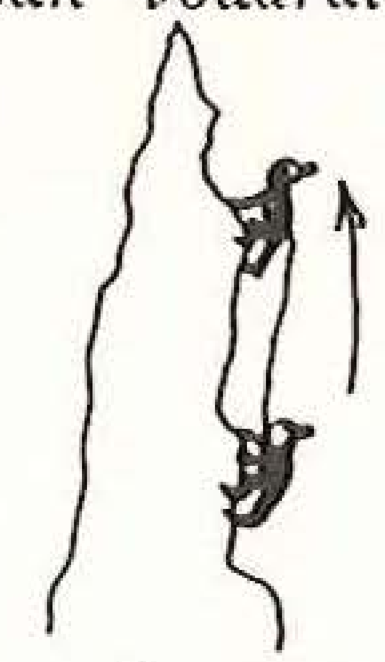


Nota : cet exemple a été choisi car il aborde plusieurs notions. Il a été réalisé en fin de CP (mois de mai).

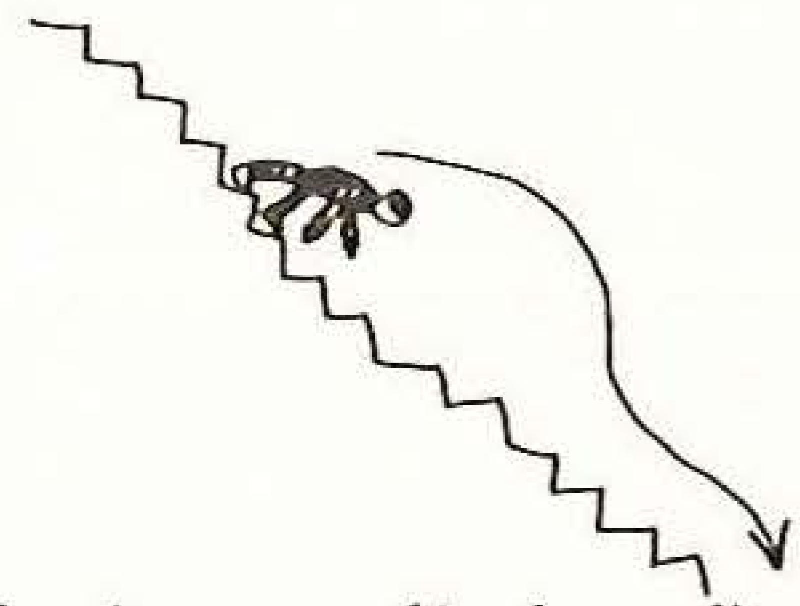
Voici quelques déplacements dessinés par les enfants :

Nous sommes allés en promenade :

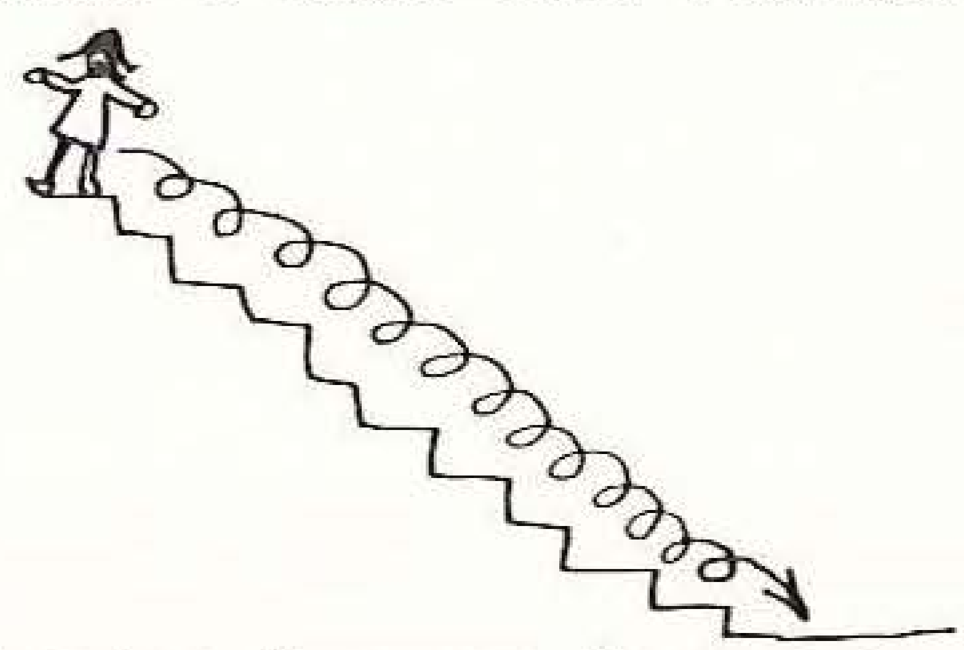
Jean voudrait être alpiniste :



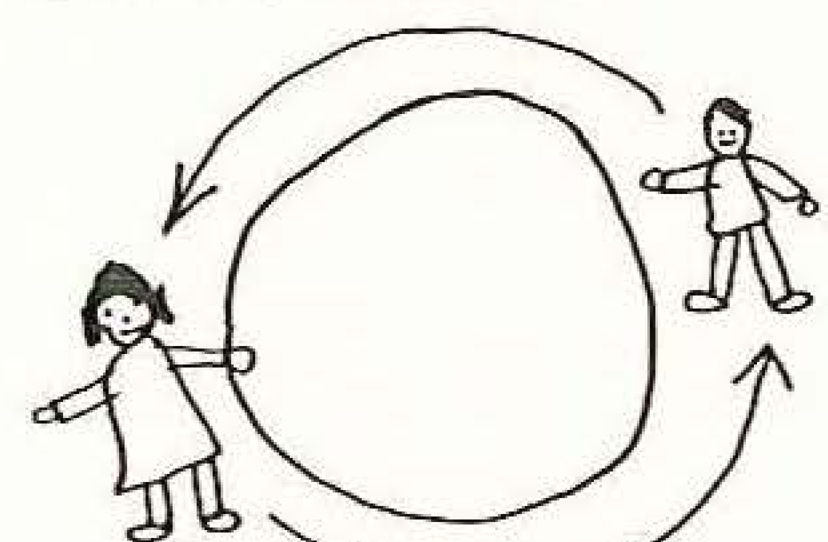
Pascal est tombé dans l'escalier :



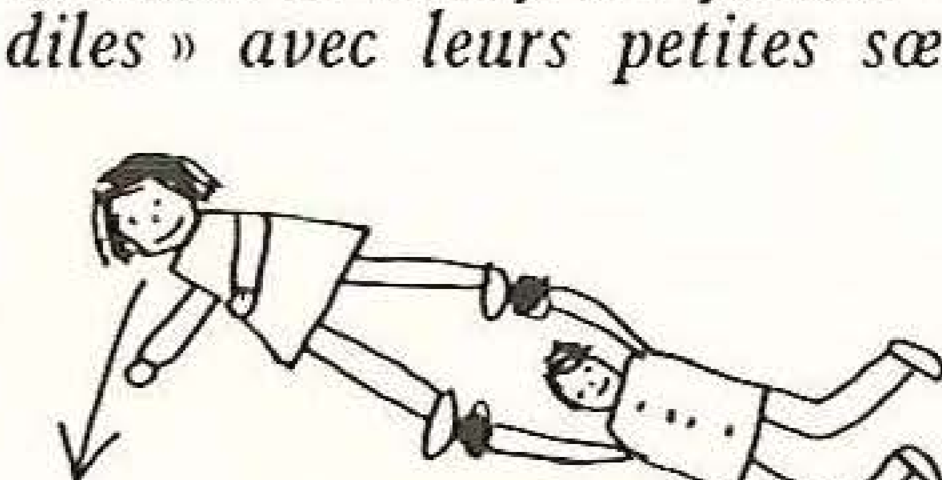
Annie a roulé dans l'escalier :



Antoine joue au loup avec sa sœur autour de la table :



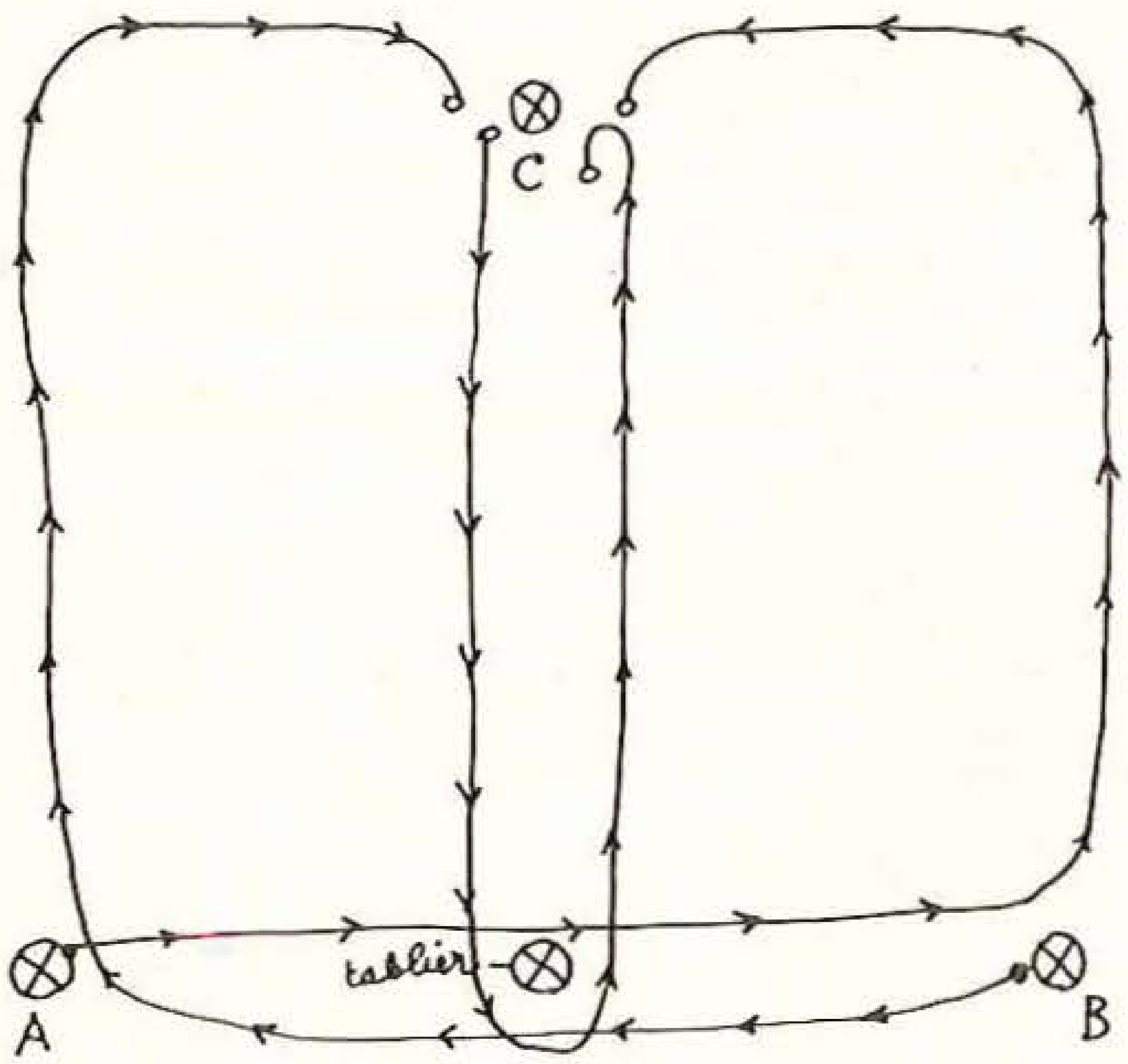
Manuel et son frère jouent « aux crocodiles » avec leurs petites sœurs :



SYMETRIES :

Sur la musique de l'indicatif de « Thibaud », nous avons inventé un déplacement : nous étions répartis en 3 groupes.

Voici le plan de notre déplacement :



3 points de départ A,B,C. Les 3 groupes partent ensemble. On se trouve tous en même temps au tablier ; puis le groupe A va vers B, le groupe B vers A, le groupe C retourne sur son chemin et on se retrouve tous en même temps en C.

Les enfants n'ont pas employé les termes A,B,C. Ils ont su seulement tracer les flèches, bien placer les points de départ, et, avec une petite explication (pour remplacer les A,B,C) les correspondants auront pu comprendre notre travail.

Les transformations géométriques sont bien ébauchées par les CP. On trouve même des amorces de composition des transformations. Des genèses ultérieures décriront plus précisément les démarrages et tâtonnements dans ce secteur des mathématiques.

C) La pratique de la mesure

Il est à remarquer que l'étude des propriétés topologiques des déplacements et transformations géométriques conduit progressivement à la mesure.

La pratique de la mesure présente une difficulté importante pour le jeune enfant.

Qu'est-ce que la mesure?

Mesurer, c'est compter un phénomène qui varie d'une façon continue, par exemple la croissance d'une plante, l'écoulement du temps, les déplacements dans l'espace. C'est bien moins facile que de compter des moutons ou des billes (fait discontinu). *On ne peut mesurer une quantité qui varie d'une manière continue que si l'on prend une quantité référentielle et que l'on mesure la croissance, la durée, la distance en fonction de cette référence qui est alors appelée unité de mesure.*

Donc il faut que l'enfant découvre le concept de mesure et il ne peut le faire que par de multiples tâtonnements.

Mesurer, ce n'est pas prendre un mètre et dire le préau a 12 m de long et 6 m de large, c'est découvrir que pour mesurer le préau, il nous faut prendre une mesure unitaire type. Que ce soit la boîte d'allumettes, le pied, le pouce ou le mètre, on mesure toujours par rapport à autre chose.

Mesurer, ce n'est pas seulement mesurer des distances, on mesure des poids, le temps, la capacité.

Le concept de mesure ne peut être qu'abordé au CP mais il est nécessaire que, dès le plus jeune âge, l'enfant ait l'occasion de faire de multiples expériences. Ce n'est qu'après un long tâtonnement, de multiples évaluations qu'il saura mesurer.

LONGUEURS :

— *Si on mesurait la classe pour les correspondants ?*

— *Oui, mais il faut des mètres et nous n'en avons pas.*
Les enfants mesurent avec leurs pieds. *Yves :* 35 *pieds, Eric :* 41, *Nadine :* 37, *Marie-Pierre :* 40.

Certains découvrent ou comprennent que celui qui a compté le plus de pieds a les pieds les plus petits et inversement.

— *Est-ce que les correspondants vont savoir comment sont les pieds d'Yves ?*
— *Il faut leur envoyer nos pointures.*

Ensuite, on décide de mesurer avec quelque chose que les correspondants pourraient avoir dans leur classe ; après discussion nous adoptons les BTJ. Les enfants les disposent sur la longueur de la classe. Il n'y en a pas assez. Christine propose de tout enlever et de mesurer avec une seule BTJ, en faisant une marque à la craie. Refus du groupe qui préfère enlever les premières BTJ utilisées et les compter à la suite des 27 déjà comptées.

La classe mesure 35 BTJ posées en long.

On voit que d'abord on a utilisé plusieurs références, les pointures, puis pour les besoins de la communication, on n'en a conservé qu'une.

On rencontre d'ailleurs d'autres difficultés dans la pratique de la mesure chez les CP :

— difficulté à concevoir le point marqué o comme l'origine de la mesure ;

— difficulté à concevoir des longueurs comme équivalentes lorsqu'elles ont même mesure, etc.

POIDS :

Intéressante aussi la façon dont les CP utilisent la balance pour comparer les poids des objets (ou plutôt leur masse). Ils utilisent en général une métode d'approximations successives. Par exemple :

Philippe décide de classer les pierres de la collection ; il dit : *J'en fais 2 tas : les grosses et les petites.*

Philippe prend une pierre dans chaque main et les soupèse (il évalue leurs poids) puis il place celle jugée la plus lourde dans le tas des « grosses » et l'autre dans le tas des « petites », puis il reprend deux autres pierres...

Régis dit que ce serait plus juste s'il prenait la balance. Philippe procède de la façon suivante :

2 ensembles : les gros (lourd) *a*, les petits (léger) *b*. Il prend 2 pierres, les pose sur chaque plateau, il dit : *Le plateau qui baisse donne le gros,* il le met dans *a*. *Le plateau qui lève donne le petit,* il le met en *b*, etc.

Constatation après l'expérience
Dans *a* il y a des pierres de toutes les grosseurs (poids)
Dans *b* c'est la même chose.
Vérification de Régis. Constat d'échec. C'est la façon de faire qui ne va pas d'où divers tâtonnements de plusieurs élèves.
Jean-Louis dit : *Je vais laisser la pierre bleue sur le plateau.*

Il essaie les pierres qu'il juge moins lourdes que la pierre bleue et fait l'ensemble des moins lourds que la bleue. Mais quand il tombe sur une pierre plus lourde, il sort la bleue et la glisse dans l'ensemble des moins lourds. Il continue ainsi et est très étonné de se retrouver à la fin avec l'ensemble de départ.

Mais la démarche de Jean-Louis entraîne celle de Malik. Il dit :
— *Il faut laisser la même pierre sur le plateau, jusqu'à la fin. Dans* a *je mets toutes les pierres plus lourdes que la bleue et dans* b *je mets les pierres moins lourdes que la bleue.*

A la fin Malik place la pierre bleue entre les 2 ensembles.

Dans la même collection :

« DOSSIERS PÉDAGOGIQUES »

des numéros pour votre documentation mathématique :

22 : Expérience de raisonnement mathématique à l'Ecole maternelle
28-29 : Expériences d'initiation au raisonnement logique
41-42-43 : Initiation au raisonnement logique à l'Ecole maternelle
46-47-48 : Une expérience de mathématique libre dans un CE1
56-57-58 : Un trimestre de mathématique libre au CE2 (I)
60-61 : Un trimestre de mathématique libre au CE2 (II)

autres numéros sur les mathématiques :

15-16 : Mathématiques au Second degré
32-33 : L'enseignement mathématique au Second degré
36-37 : Calcul et mathématique au CM et en classe de Transition
53 : Transformations et matrices

Paraît sous la responsabilité juridique de l'Institut Coopératif de l'École Moderne - Pédagogie Freinet - 06 - Cannes — Président : Fernand DELÉAM. Responsable de la rédaction : Michel BARRÉ — Printed in France by Imprimerie CEL — Cannes — Dépôt légal : 4e trimestre 1970 — No d'édition 289 — No d'imp. 1679 — Prix du numéro simple 1,50 F