Les dossiers pédagogiques

l'éducateur

ICEM · FIMEM

Pédagogie Freinet

53

L'enseignement des mathématiques au Second degré

TRANSFORMATIONS ET MATRICES

par R. BOUCHERIE
et la commission I.C.E.M.

SUPPLÉMENT
au numéro 4
de janvier 1970

SOMMAIRE

L'enseignement des mathématiques
TRANSFORMATIONS ET MATRICES
(Compte rendu d'expérience pédagogique)

par Robert BOUCHERIE et la commission I.C.E.M.

●

> *« ...Il serait désirable de libérer l'élève dès que possible de la camisole de force des « figures » traditionnelles au profit de l'idée de transformation géométrique du plan et de l'espace tout entiers, sur laquelle on doit insister sans cesse et qu'il faut illustrer par de multiples exemples... »*
>
> Jean Dieudonné

Transformations

Voici le compte rendu d'un travail en mathématique qui s'est effectué en 6e et 5e (moderne court) dans le cadre de l'heure des T.S.E. (travaux scientifiques expérimentaux).

Travail aux machines

J'ai fourni les machines à transformer

1°) la planche avec té gradué
(voir livret « libres recherches » n° 2)

2°) les pantographes

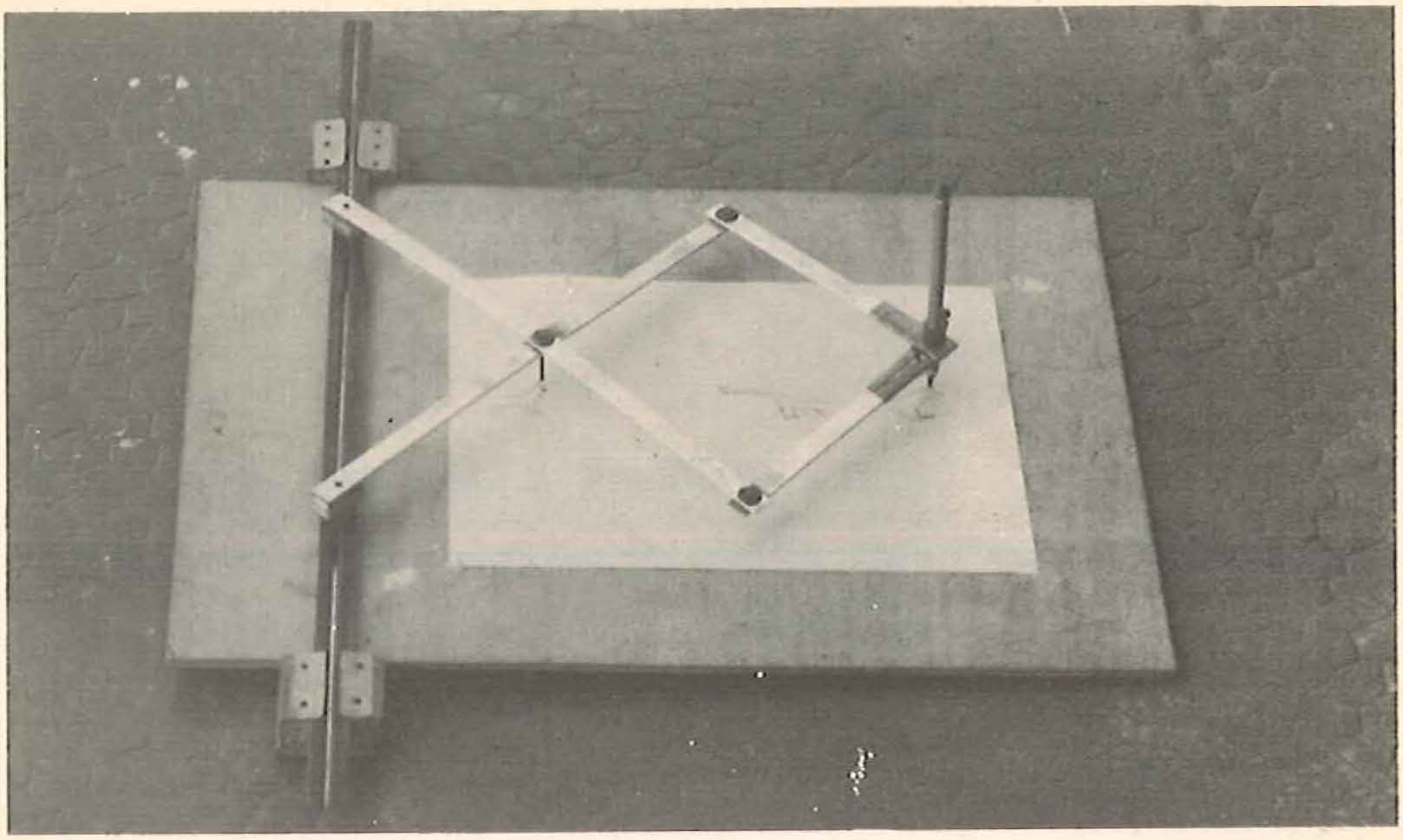
Avec de la tringle plate à rideaux, j'ai fabriqué 3 pantographes fixes qui agrandissent respectivement 2, 3 et 5 fois, et des pantographes démontables... et transformables en d'autres machines.

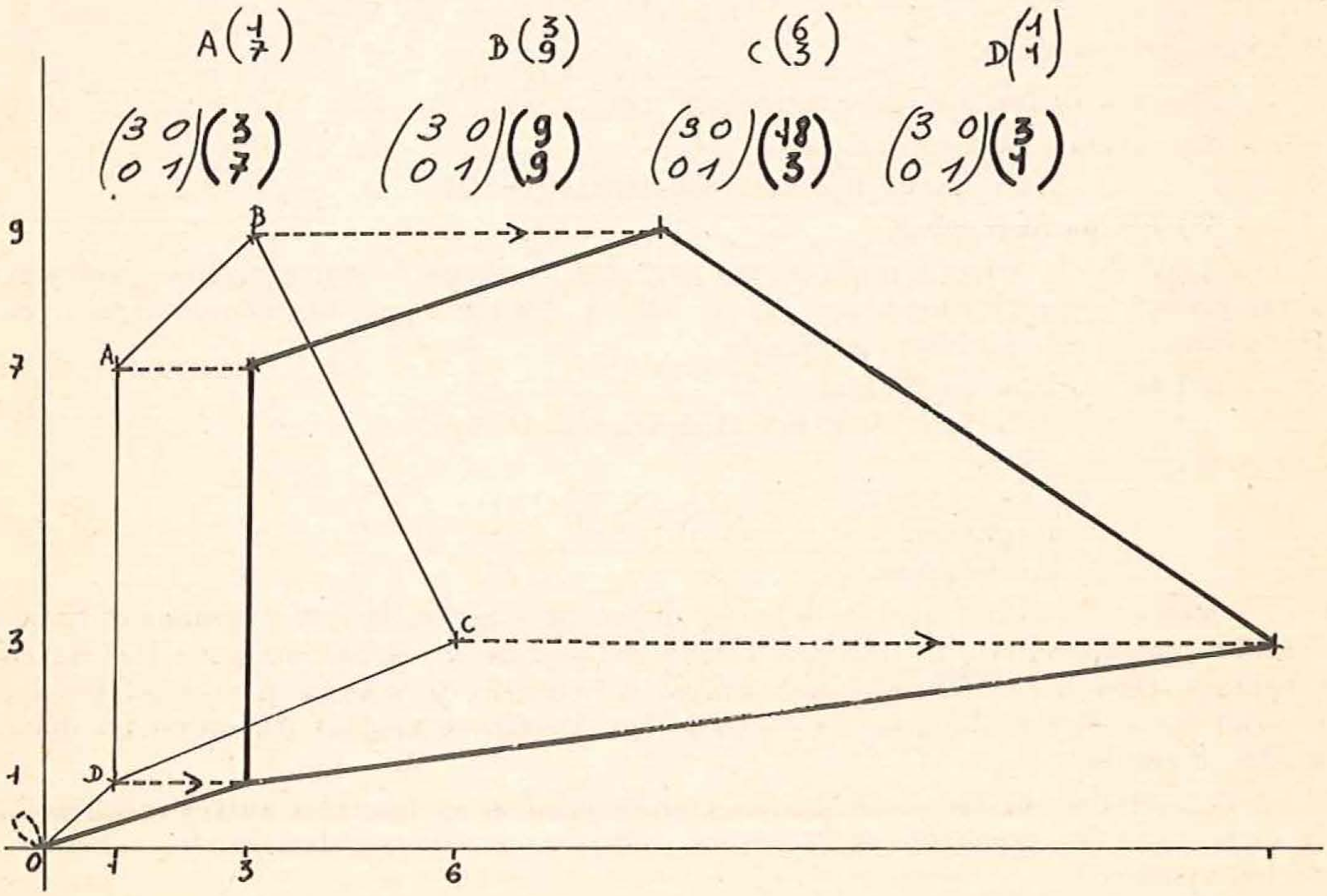
3°) la planche à glissière
(voir livret « libres recherches » n° 4)

et ses machines :
- à translation
- à symétrie
- à dilatation.

Remarque : Alors que je dois, au début de l'année, montrer comment on se sert des pantographes, je n'ai pas besoin de fournir d'explication pour les autres machines. Quand j'ai fabriqué la machine à symétrie, je n'avais pas pensé qu'elle pouvait faire les translations. Le premier jour, les élèves avaient découvert les deux modes d'emploi.

Les élèves ont fait de multiples transformations et trouvé d'autres machines : la vitre pour les symétries et le papier calque pour les translations, les rotations et les symétries.





$A\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ $D\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\9\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}18\\3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$
A
B
C
D
9
7
3
1
0
1
3
6

La page précédente montre la machine et la matrice qui effectuent le même travail. Mais comment sommes-nous passés...

Des « machines » au calcul

La planche graduée permet deux types d'exercices :

— choisir des points et trouver leurs coordonnées

— se donner des couples de nombres et tracer les points qu'ils déterminent.

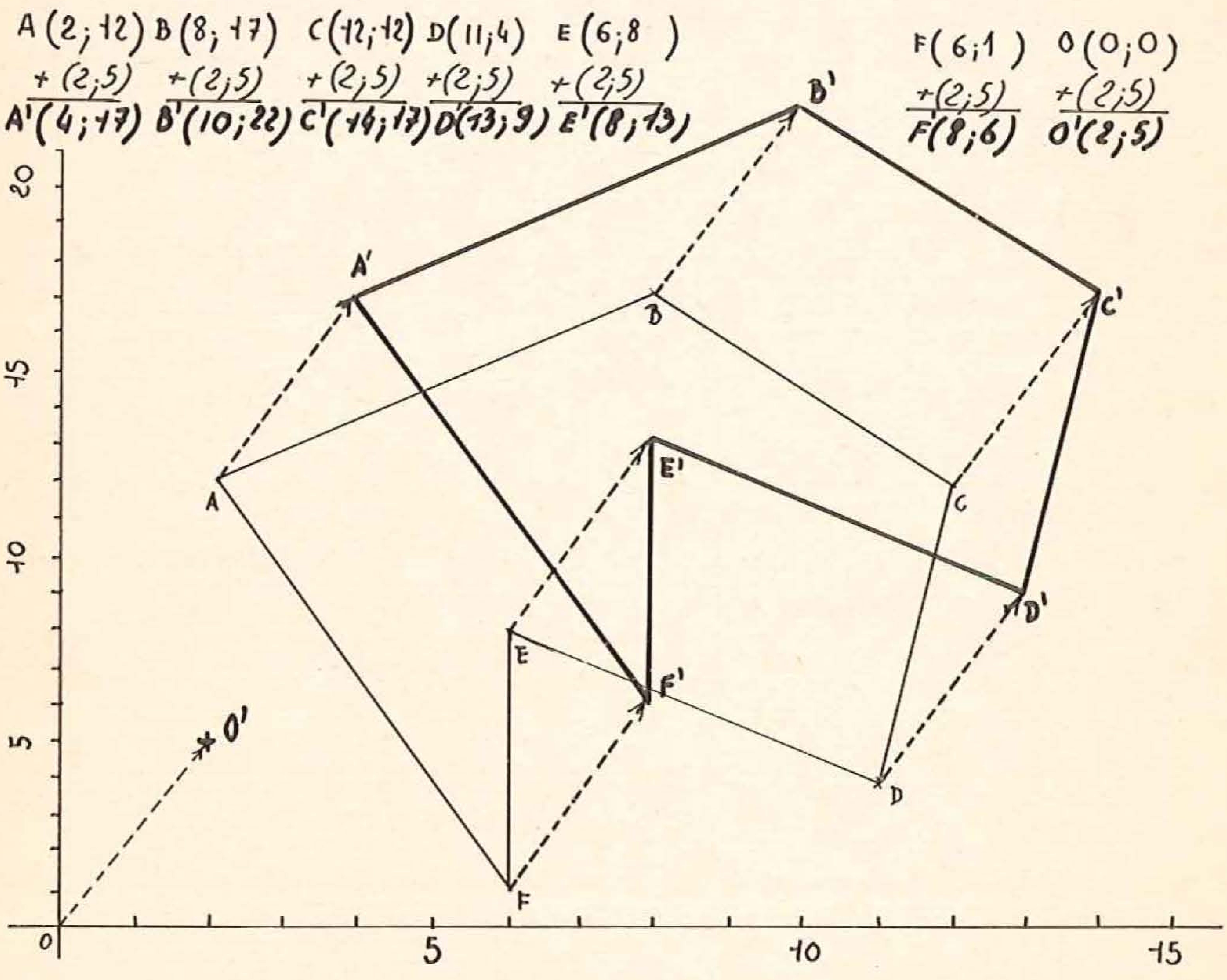
Et quand on a des nombres on peut faire des opérations !

J'ai suggéré d'utiliser plusieurs couleurs.

Exemple :

$$\begin{array}{rr} A & (2\,;\,12) \\ + & (2\,;\;\;5) \\ \hline & (4\,;\,17) \end{array}$$

le point A et le couple (2 ; 12) en bleu (ici en trait fin)
le point A' et le couple (4 ; 17) en rouge (ici en trait épais)
si le couple (2 ; 5) est en vert j'ai laissé deviner de quelle couleur doit être la flèche... en vert, bien sûr. (pour la reproduction on a choisi l'italique et le pointillé).

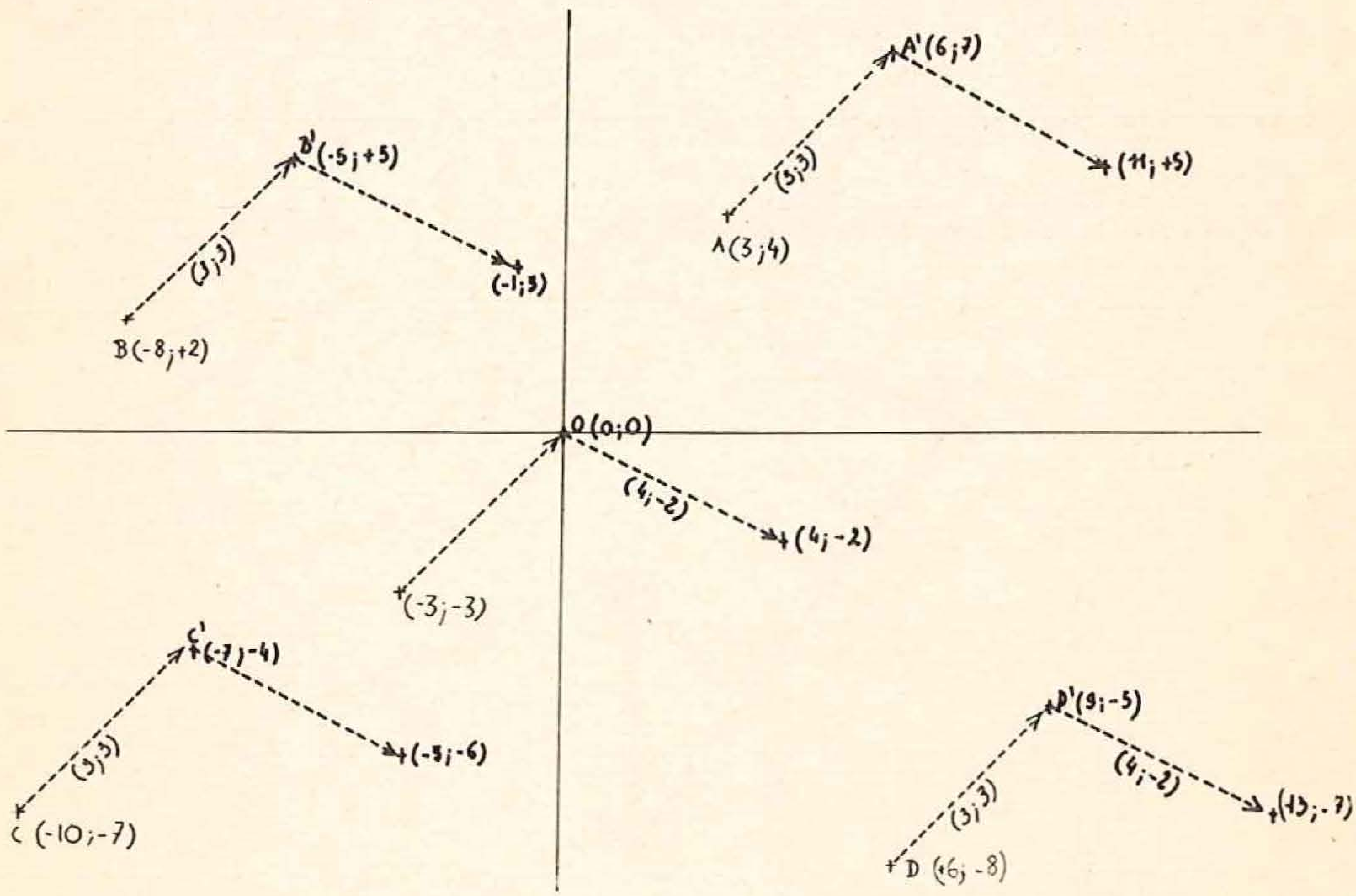


Un couple de nombres désigne donc un point ou un vecteur.

D'où la notion de somme de vecteurs qui me semblait immédiate... et dont on n'a pas parlé !

Mais en faisant des soustractions, certains trouvaient des flèches dirigées vers le bas et la gauche et on partait à la recherche de flèches montant vers la gauche ou descendant vers la droite.

Un élève de 6e étant arrêté par une soustraction du genre : 4 — 7 = ..., je lui expliquai rapidement qu'il pouvait continuer la graduation « au-dessous de zéro » en plaçant le signe moins devant les nombres. Il déclarait que c'était « astucieux » et l'utilisait aussitôt.



Pendant ce temps, des élèves de 5e essayaient la multiplication et la division qu'ils disposaient ainsi →

$$\begin{array}{c} (2\,;\,3) \\ \times\, 2 \\ \hline (4\,;\,6) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} (6\,;\,9) \\ :\, 3 \\ \hline (2\,;\,3) \end{array}$$

reconnaissant aussitôt l'homothétie fournie par les pantographes. Je leur indiquai alors l'existence d'opérateurs de transformations appelés matrices et la manière de s'en servir en les disposant ainsi :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} \end{array}$$

la matrice équivalente au multiplicateur 2 s'écrivant $\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$

autre exemple

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}10\\11\end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 \times 4 + 2 \times 3 = 10 \\ 0 \times 4 + 3 \times 3 = 9 \end{array}$$

le point $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ est transformé

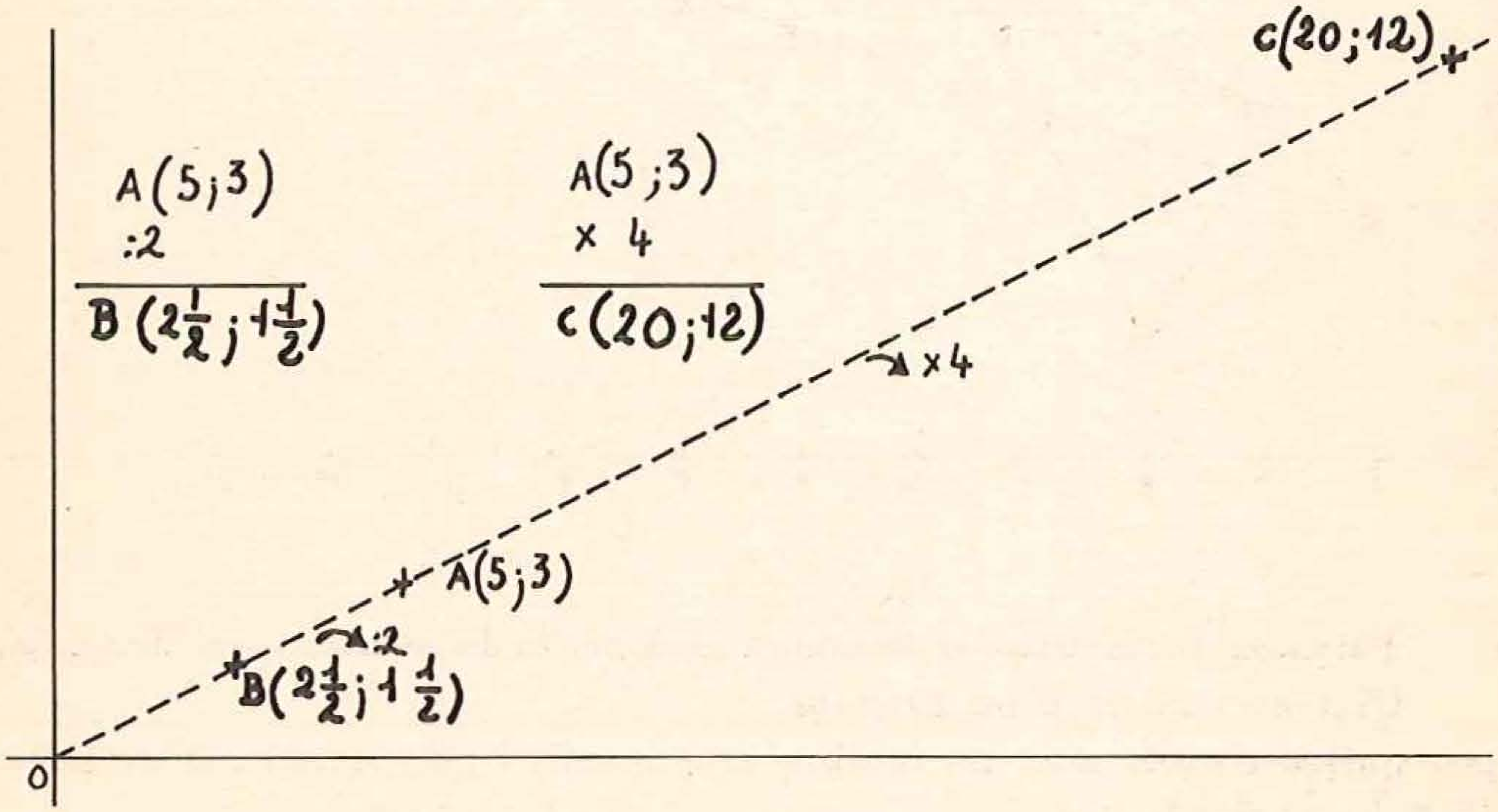
en $\begin{pmatrix}10\\9\end{pmatrix}$

ce qui a obligé les élèves à écrire les coordonnées d'une façon nouvelle $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ au lieu au lieu de (2 ; 3) mais cela ne fut pas gênant et la nouvelle piste s'avéra passionnante.

Remarque : Au lieu de :

$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ j'aurais pu leur faire écrire : $(X\,;\,Y) = (x\,;\,y).\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$

mais je trouve la disposition moins pratique et je n'ai pas parlé de non-commutativité ni de matrice transposée même quand l'occasion s'est présentée.

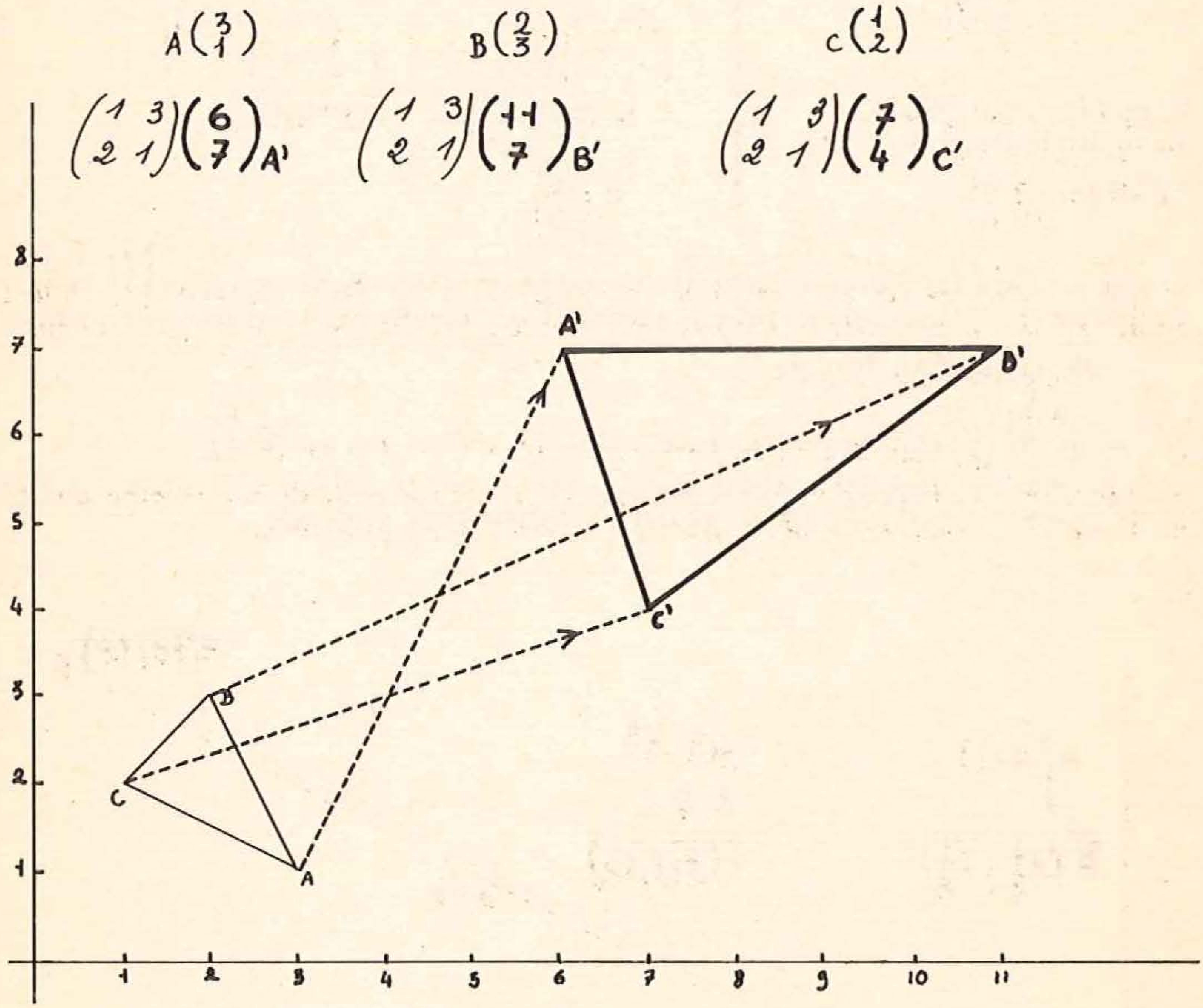


Pourquoi ai-je introduit les matrices ?

1°) parce que je me doutais bien que la piste serait bonne

2°) parce que je ne voulais pas qu'ils continuent à écrire les multiplications et les divisions comme ils avaient commencé.

Cela n'a nullement gêné les élèves de savoir que ce qu'ils avaient fait était juste mais que « ça ne se faisait pas comme ça ».

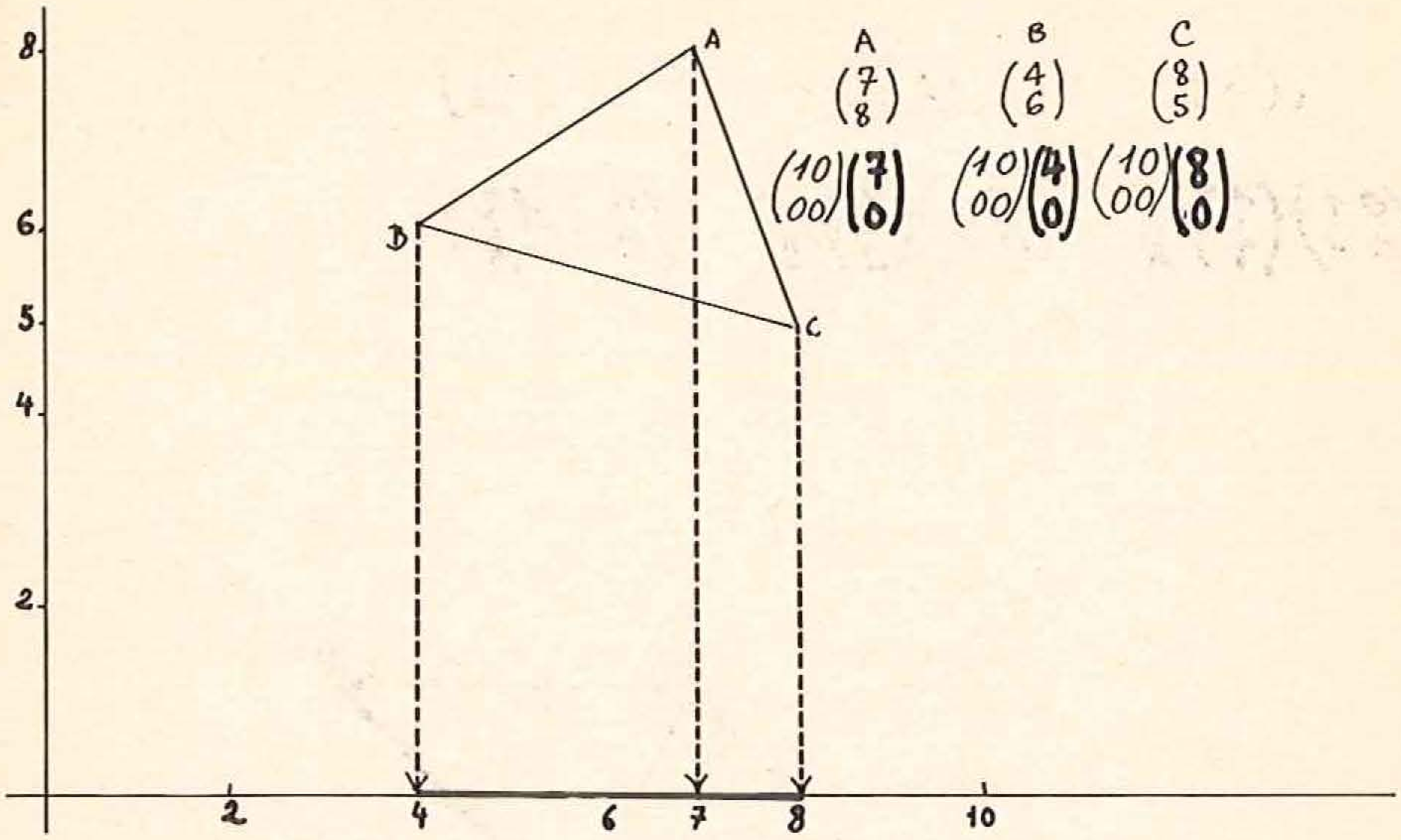


J'ai fourni les matrices en 5e comme on donne la division au cours élémentaire.

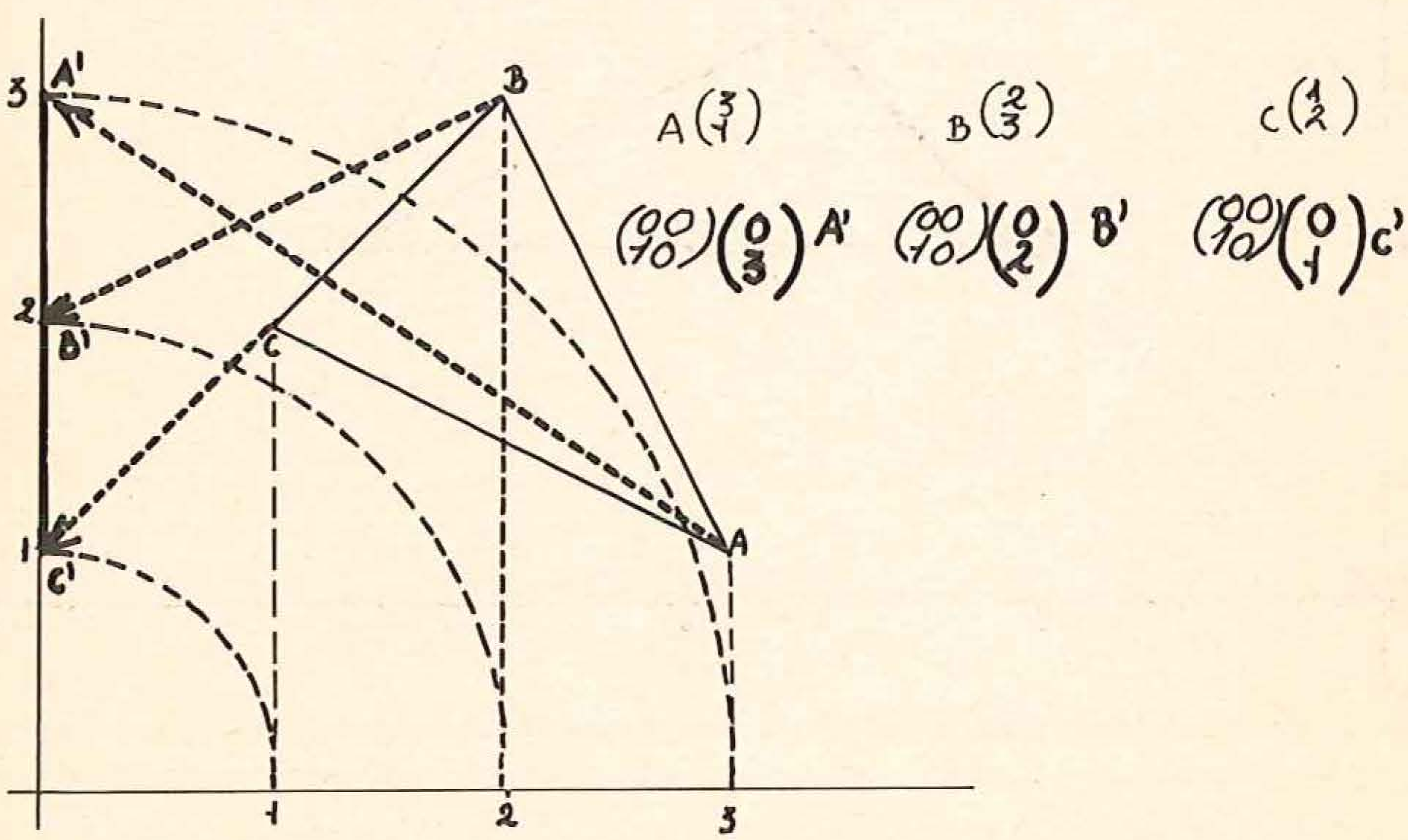
C'est un outil et il est pratique.

Après quelques essais avec des nombres trop grands 7 ; 8 ; 15, etc., ils reviennent vite à 1 ; 2 ; 3 ; 4.

Je rappelle l'existence du zéro.

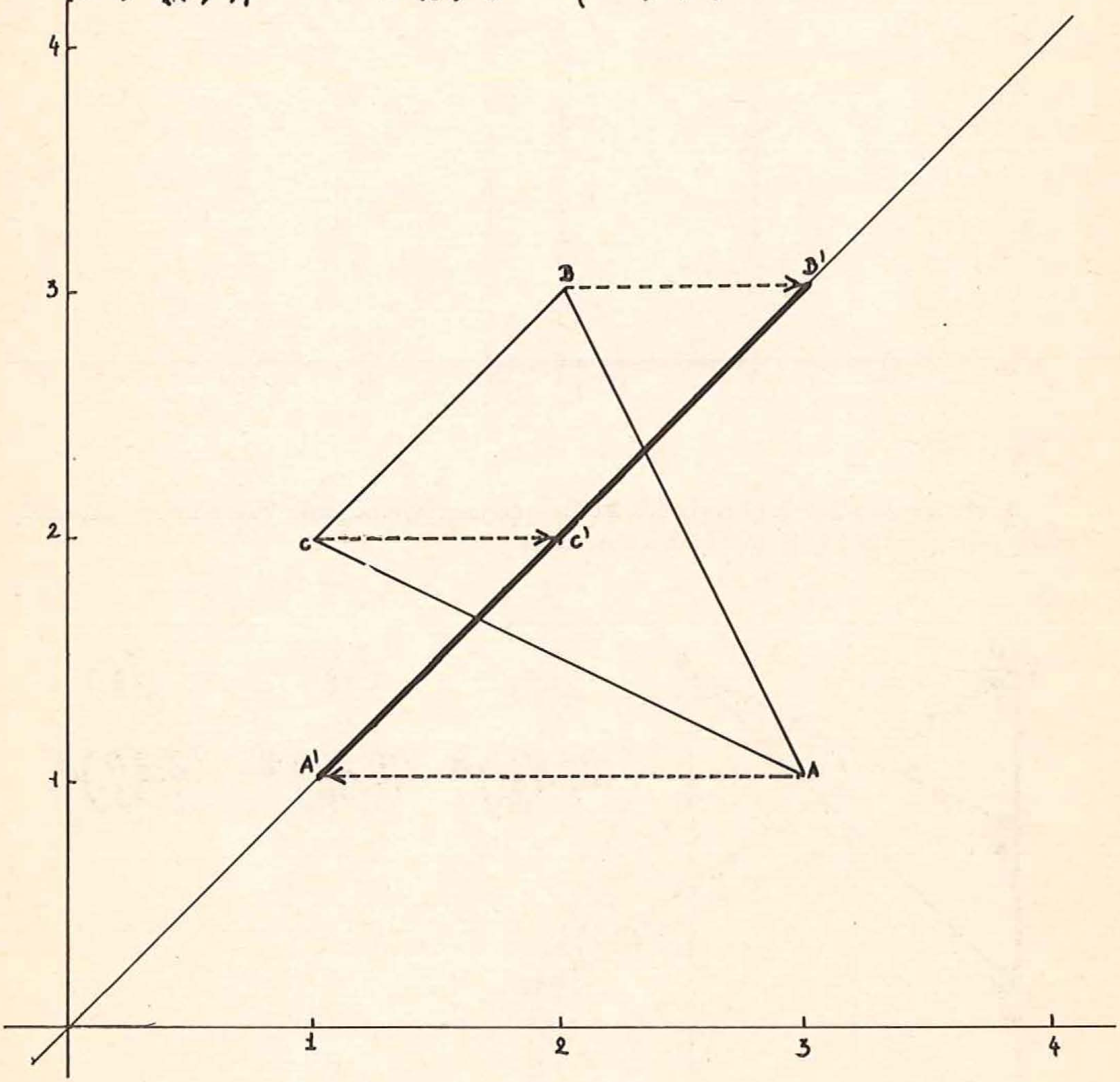


Après avoir tracé à la règle les flèches de correspondance, l'élève s'est demandé si elles représentaient bien le chemin suivi.

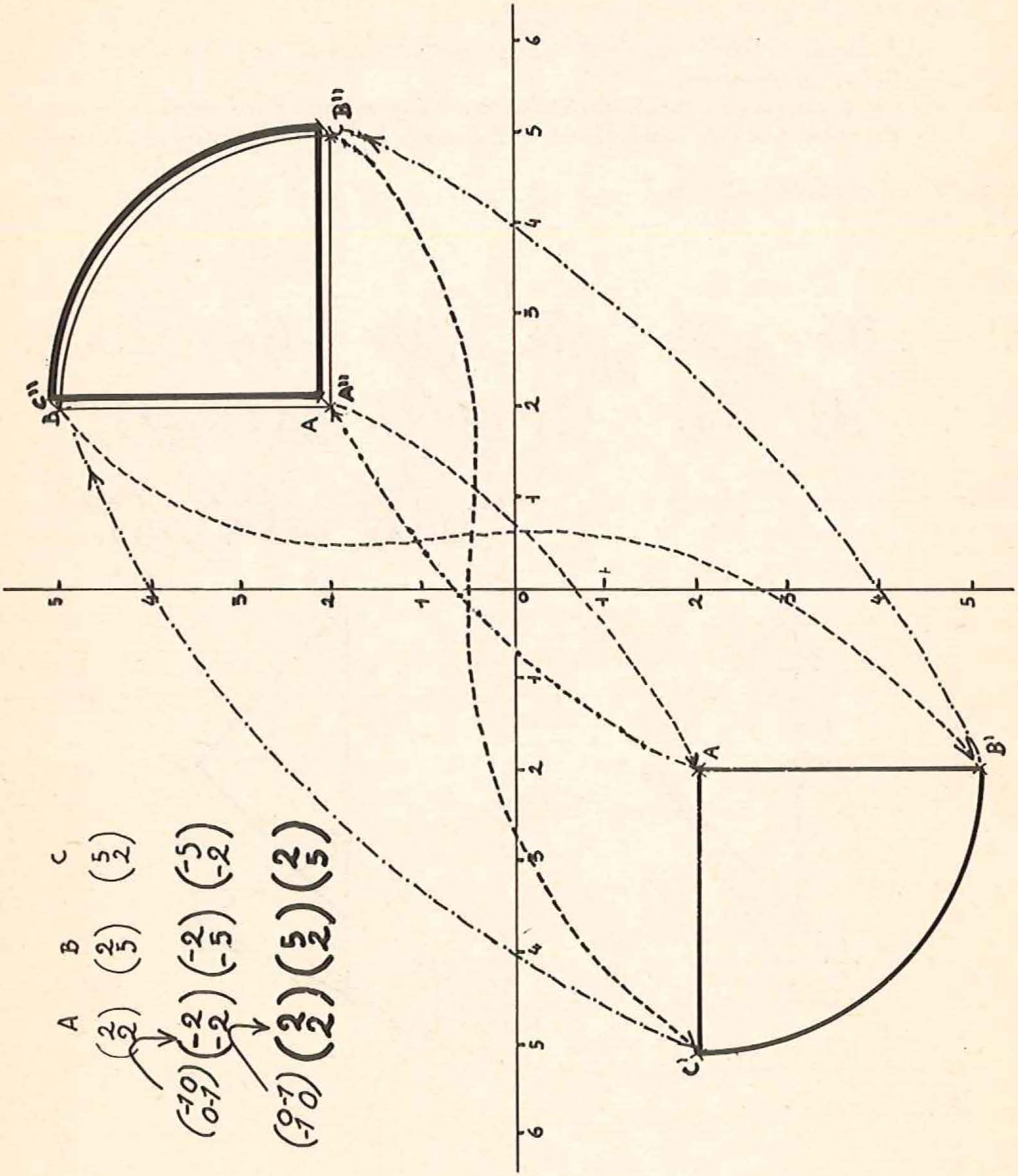


$A\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}A'$ $\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}B'$ $\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}C'$



Les nombres négatifs apparaissent.



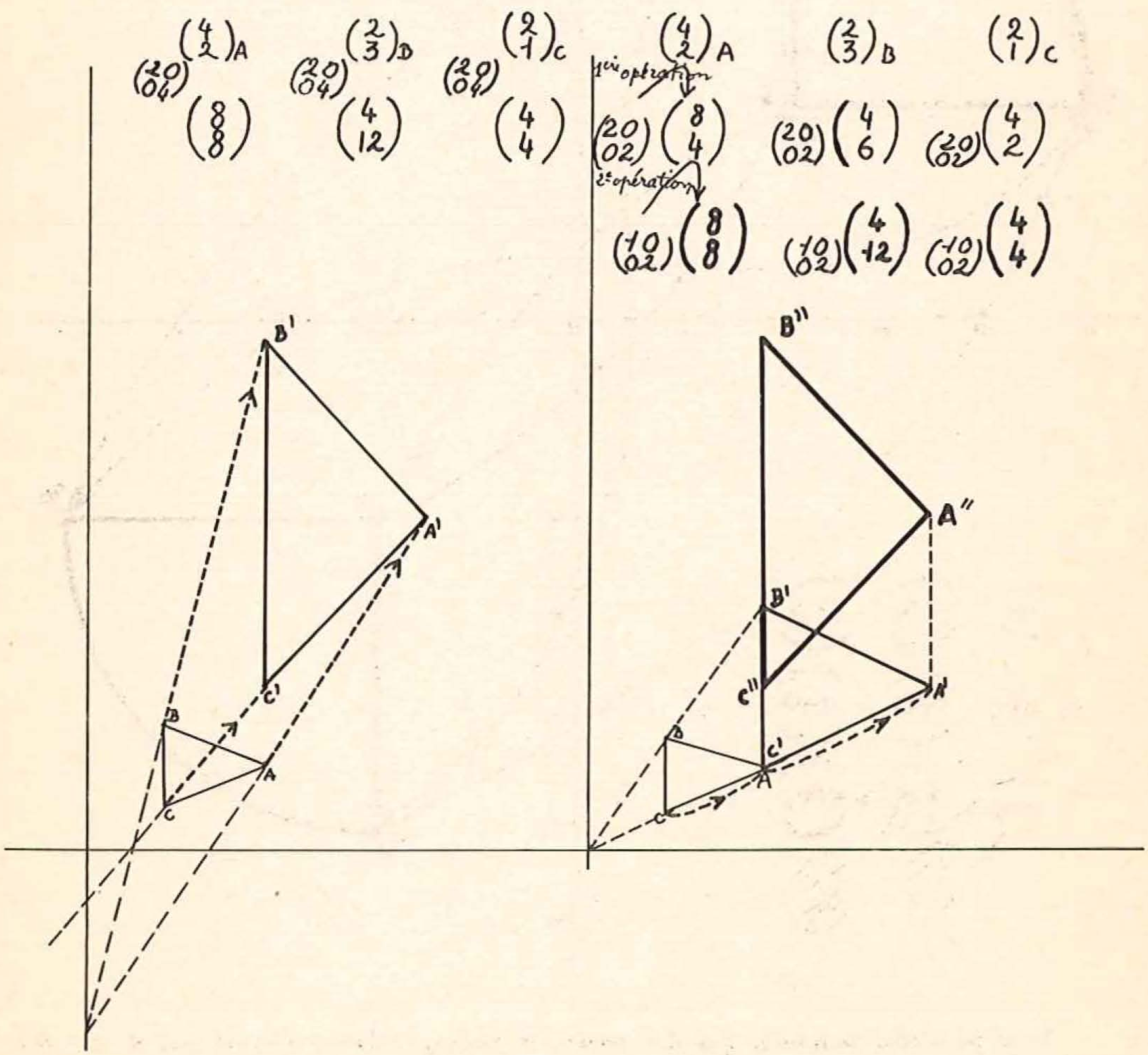
Il est peut-être dommage que les flèches de correspondance n'aient pas été tracées à la règle !

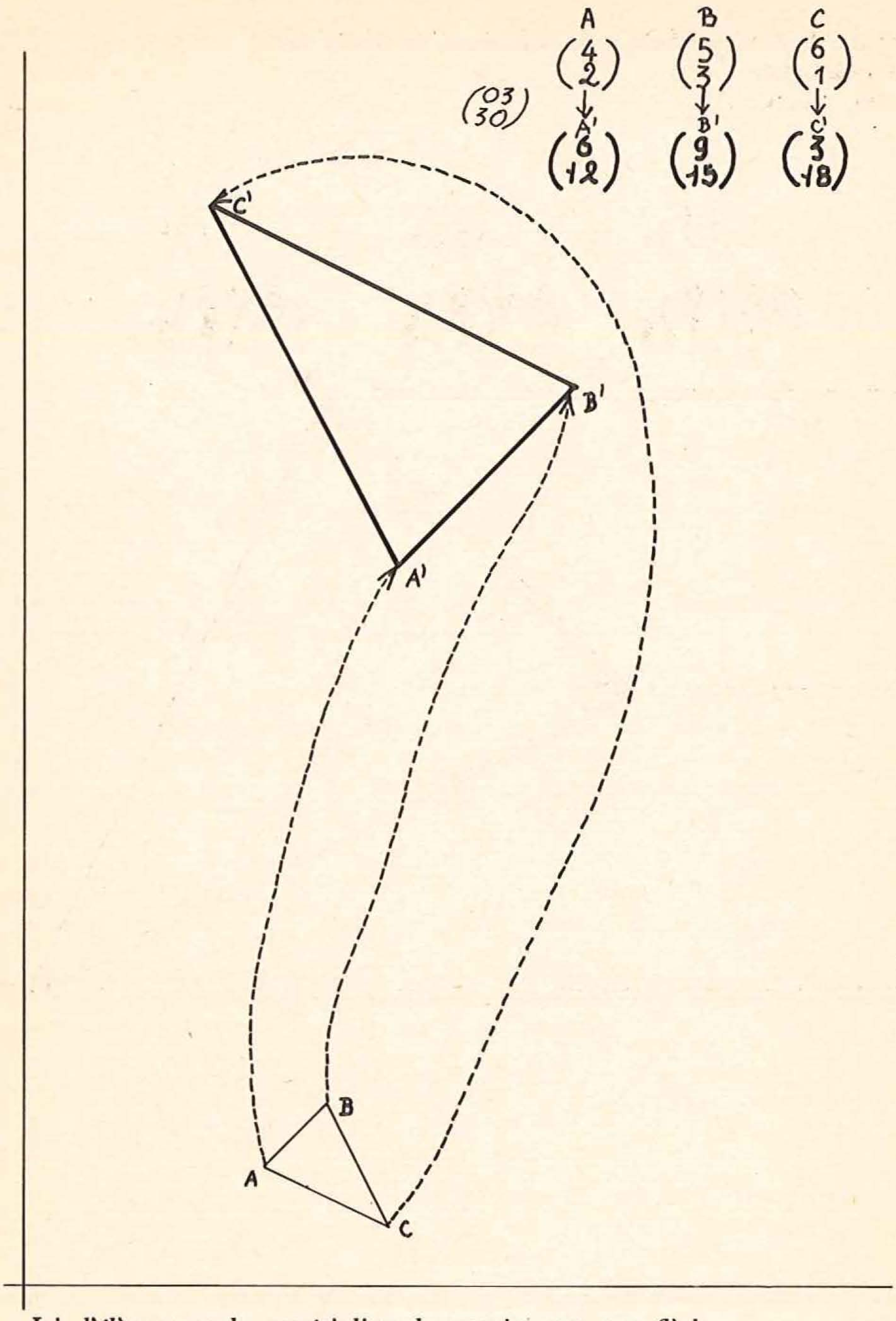
Des transformations nouvelles apparaissent. Généralement composées de 2 transformations simples, elles semblent conduire au produit des matrices.

Là aussi la piste ne sera pas suivie.

— *Monsieur! Quelle est cette transformation? Est-ce une homothétie?*
— *Qu'en pensez-vous?*
— *Ça y ressemble; mais les flèches ne viennent pas d'un même point.*
— *En effet, c'est une composition de 2 transformations. Pouvez-vous les trouver?*

et je les ai obtenues aussitôt.



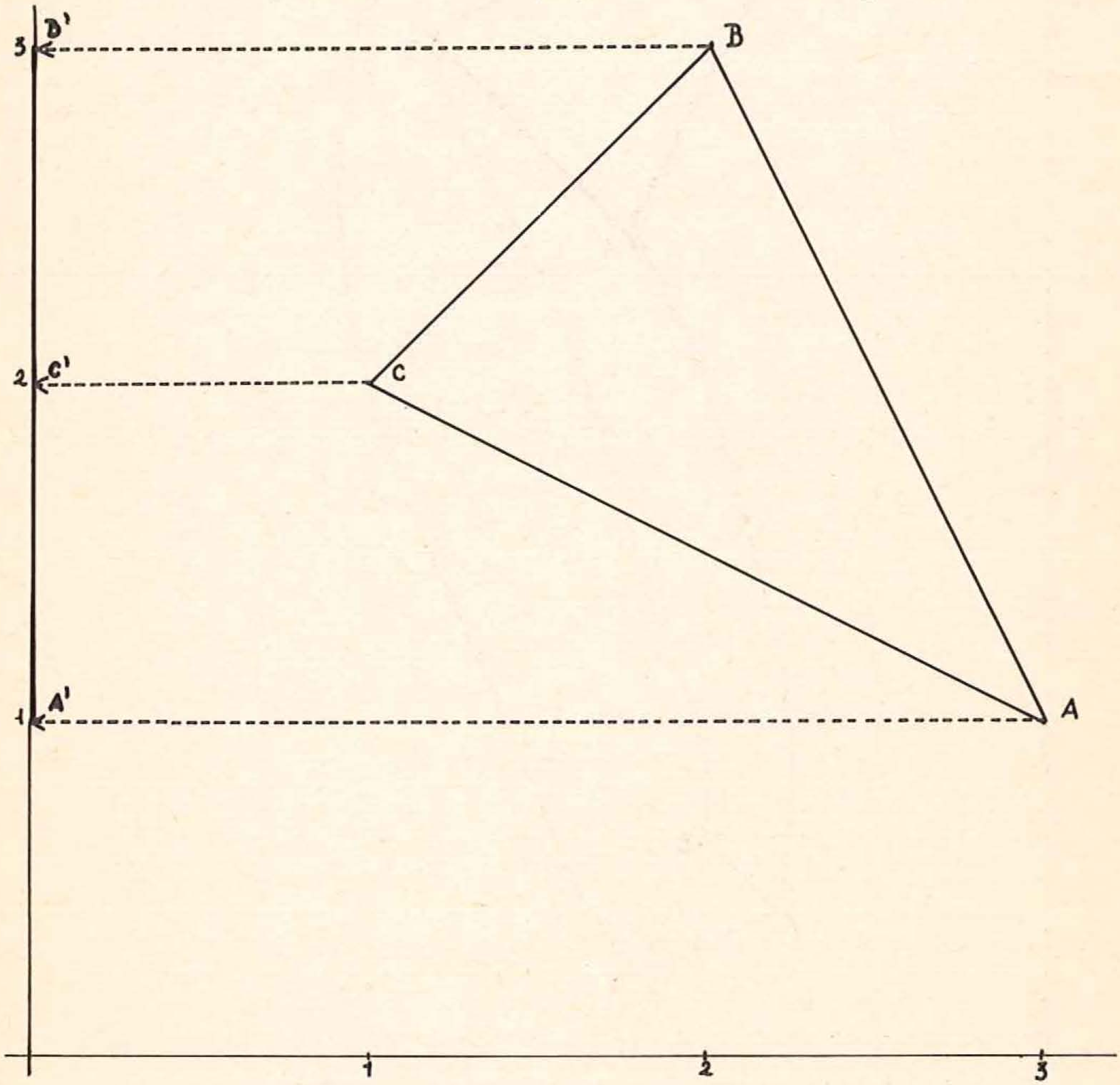


Ici, l'élève a voulu matérialiser la matrice par une flèche.
Je n'ai pas jugé utile d'intervenir.

En revanche 2 transformations simples sont découvertes :
— les projections
— et les transvections.

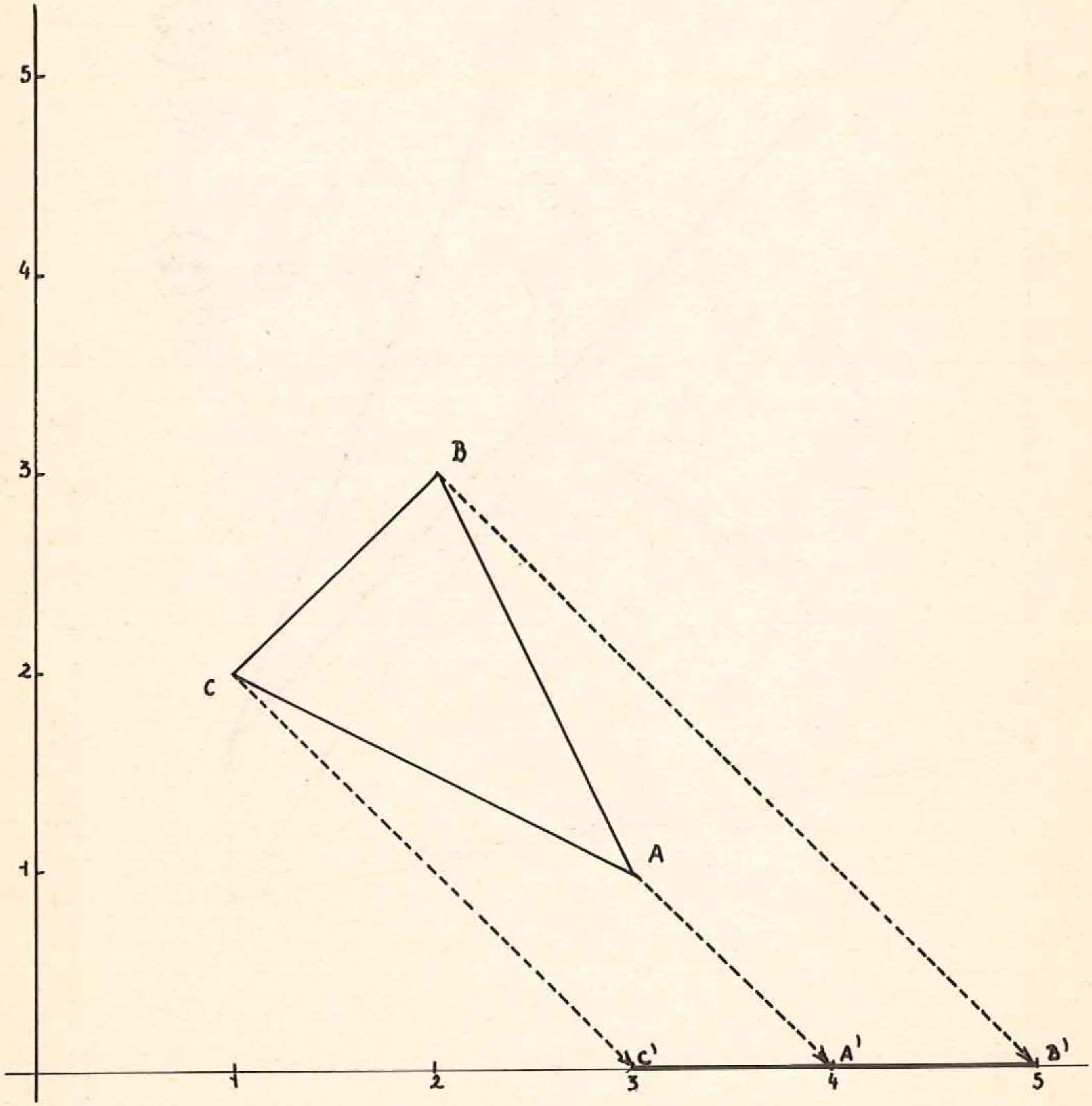
$$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}_A \qquad \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}_B \qquad \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}_C$$

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_{A'} \qquad \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}_{B'} \qquad \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}_{C'}$$

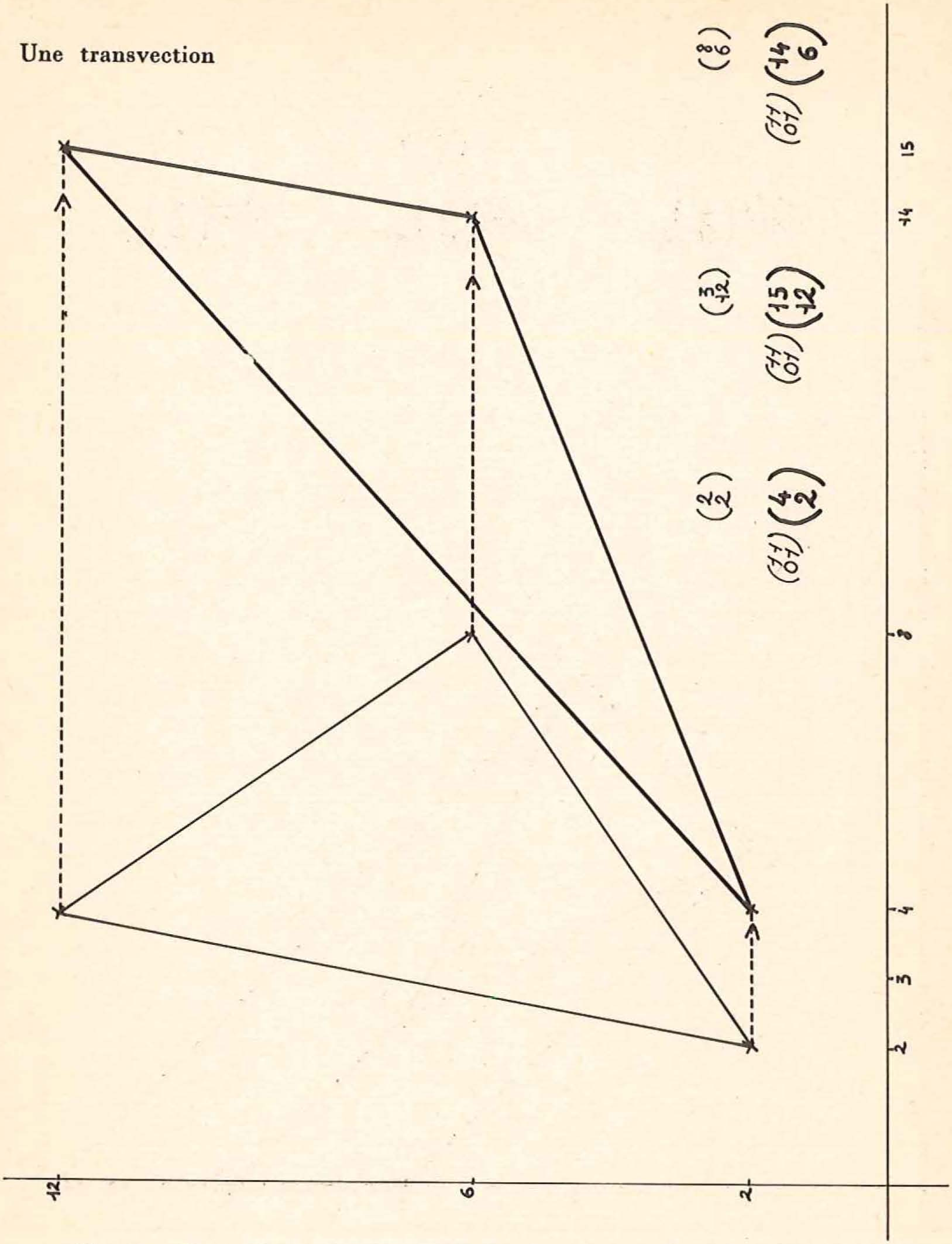


$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} A$ $\qquad$ $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} B$ $\qquad$ $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} C$

$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}_{A'}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}_{B'}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}_{C'}$

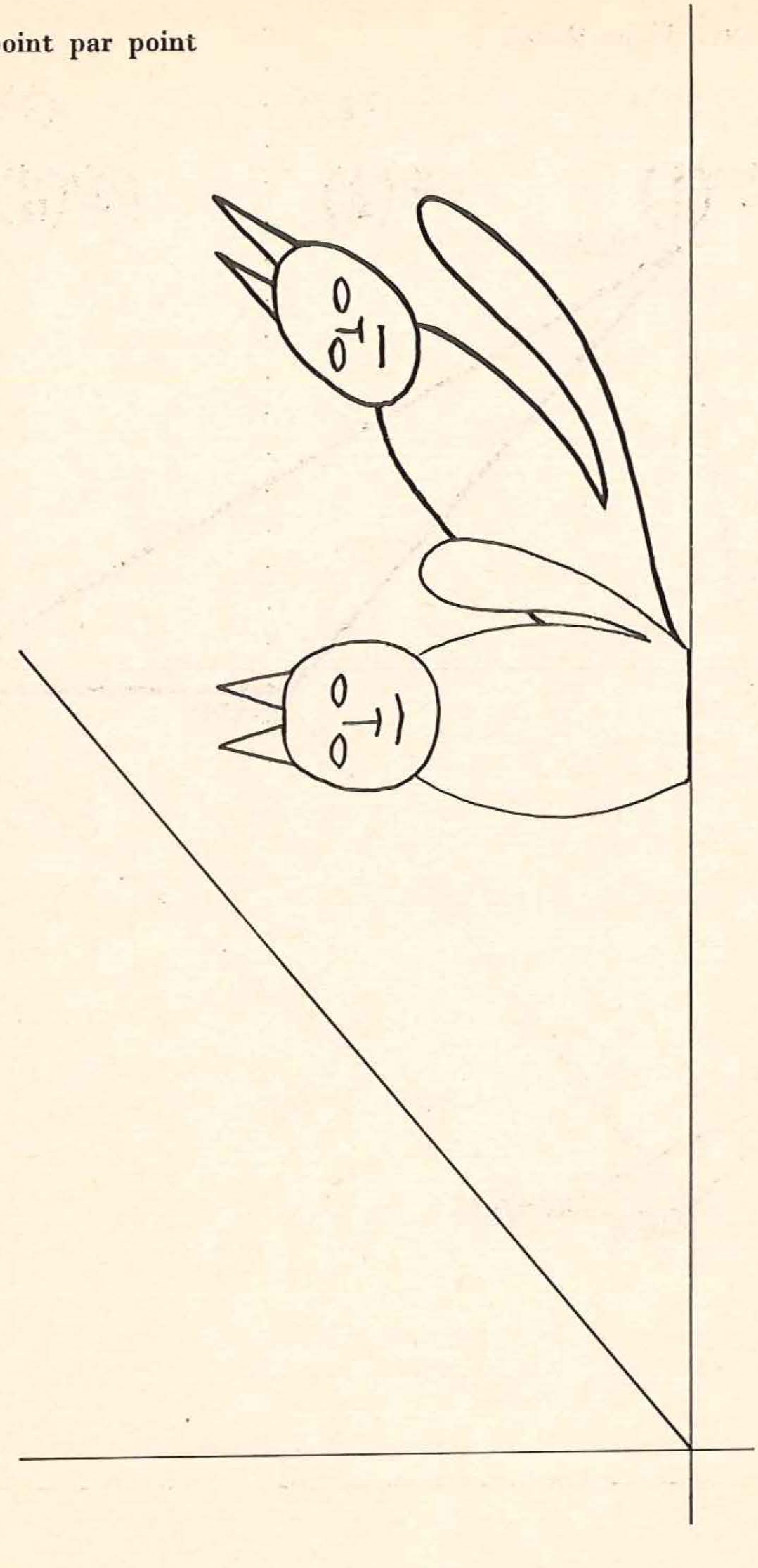


Une transvection



Ces transformations obtiennent du succès et avec elles, du calcul on revient aux machines (ou à la recherche d'une machine... qui n'a pas été trouvée).

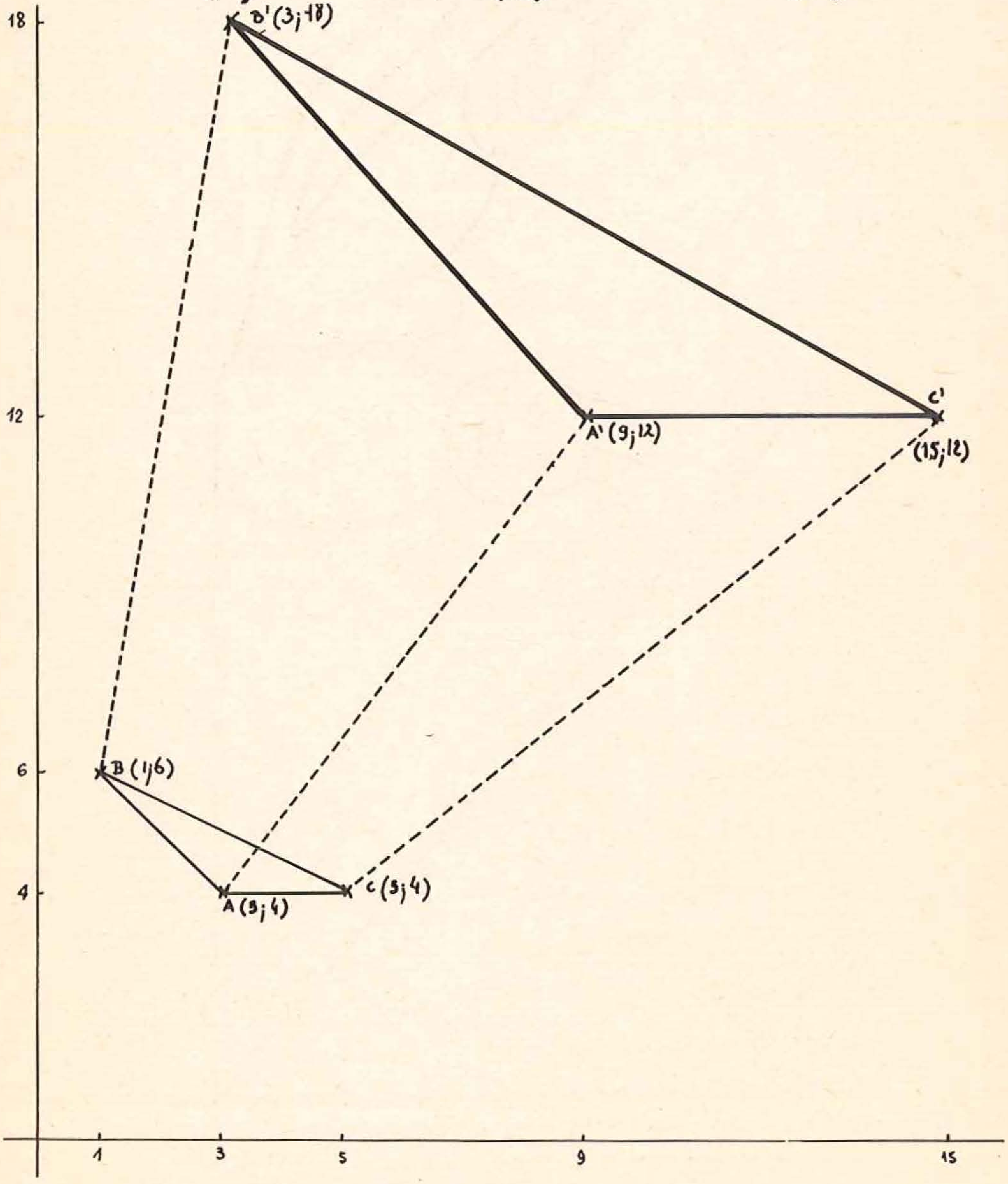
Construction point par point



Puis on retrouve l'homothétie.

$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}A$ $\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}B$ $\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}C$

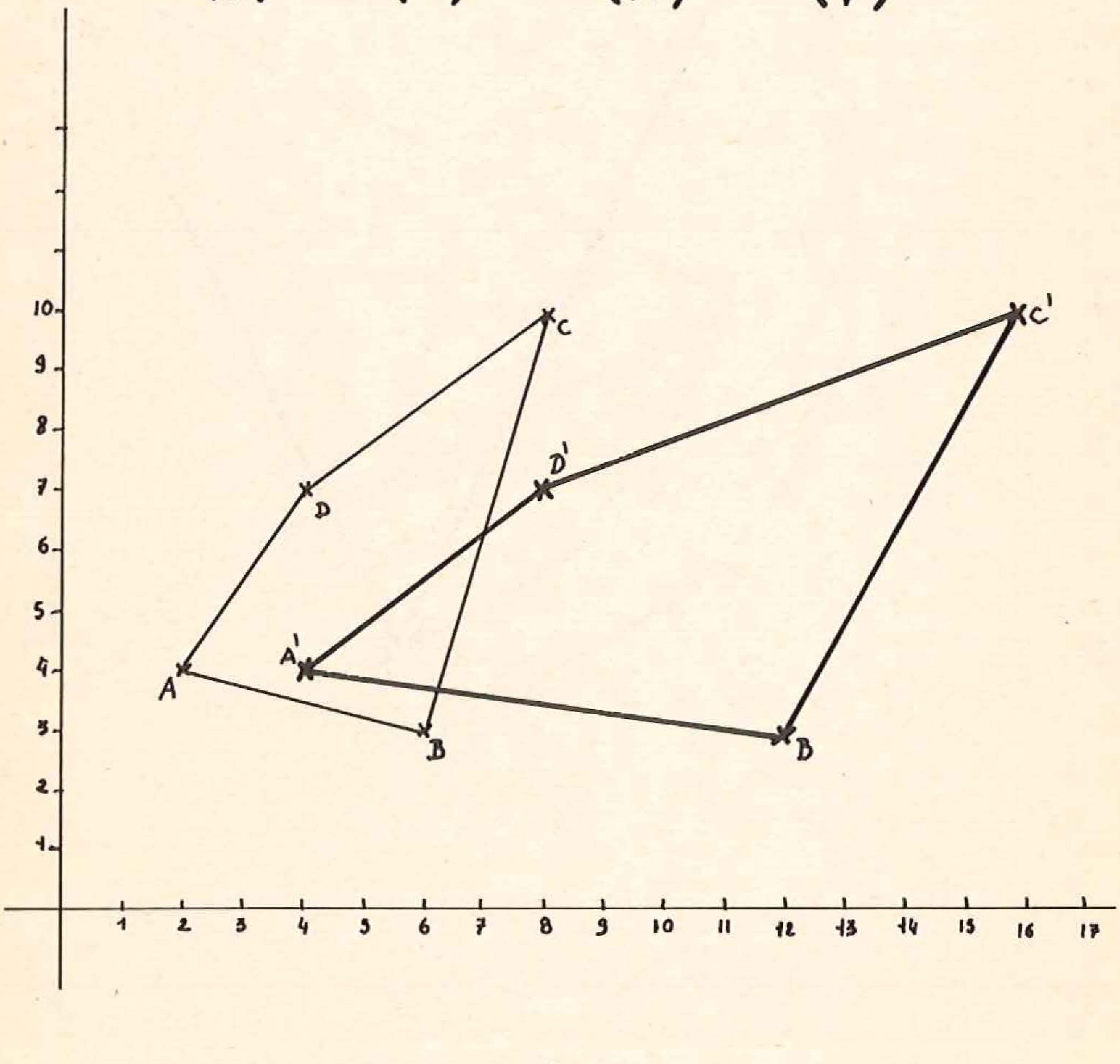
$\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\12\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\18\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15\\12\end{pmatrix}$



on retrouve la dilatation

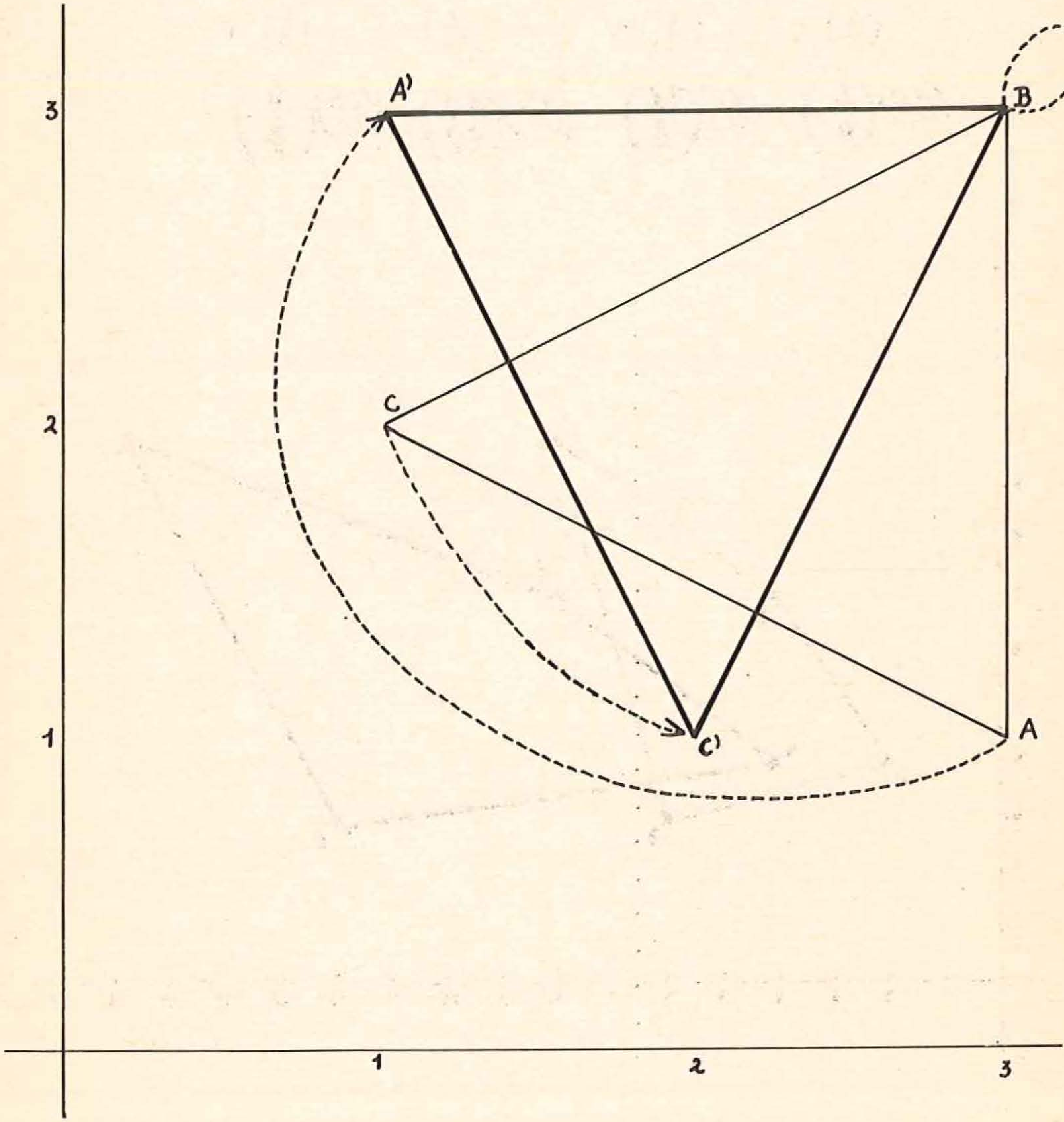
$$\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} A \qquad \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix} B \qquad \begin{pmatrix}8\\10\end{pmatrix} C \qquad \begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix} D$$

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12\\3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}16\\10\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix}$$



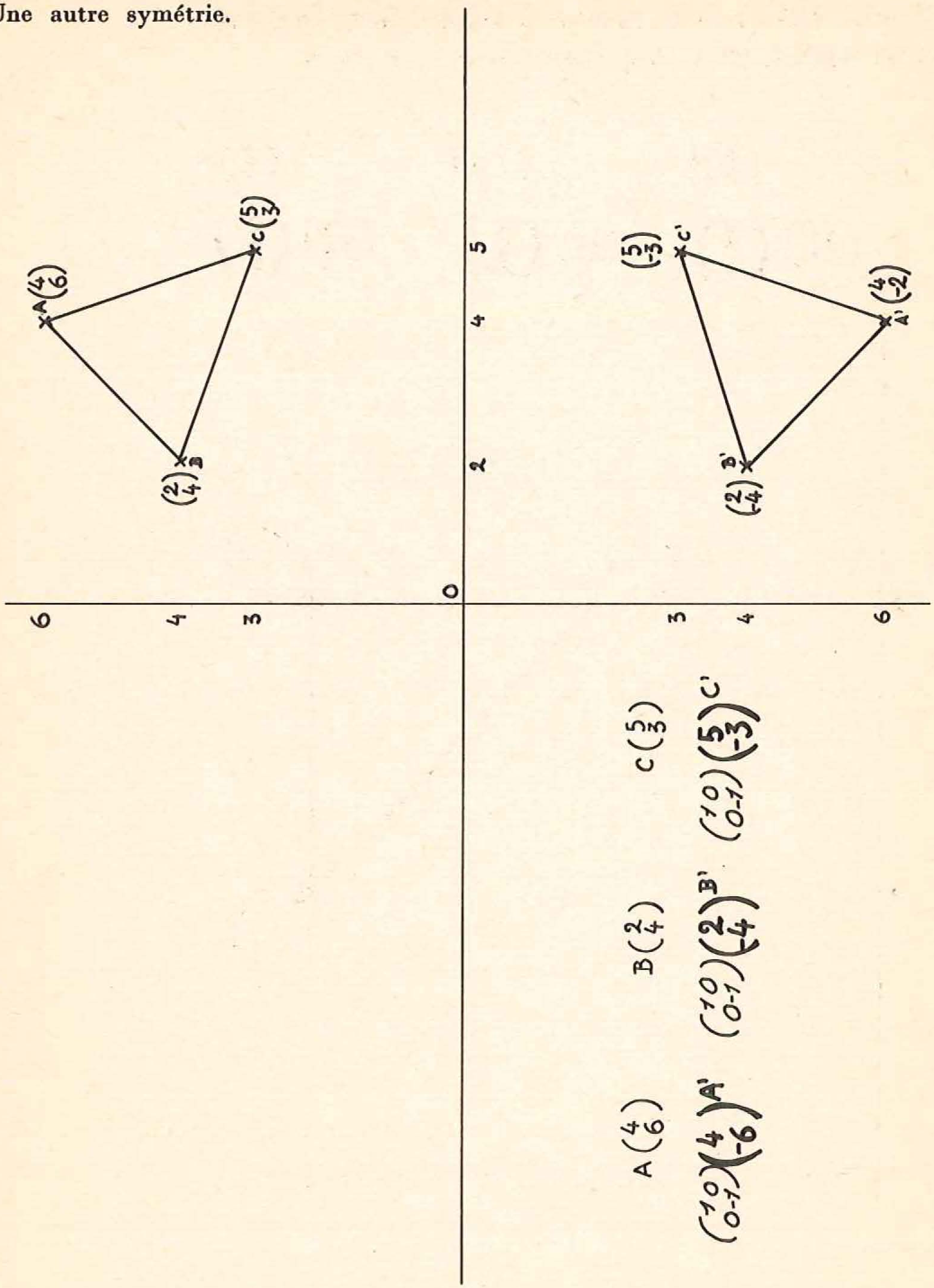
$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ A $\qquad \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ B $\qquad \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ C

$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ A' $\qquad \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ B' $\qquad \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ C'



L'élève n'a pas reconnu la transformation et n'a pas tracé l'axe.

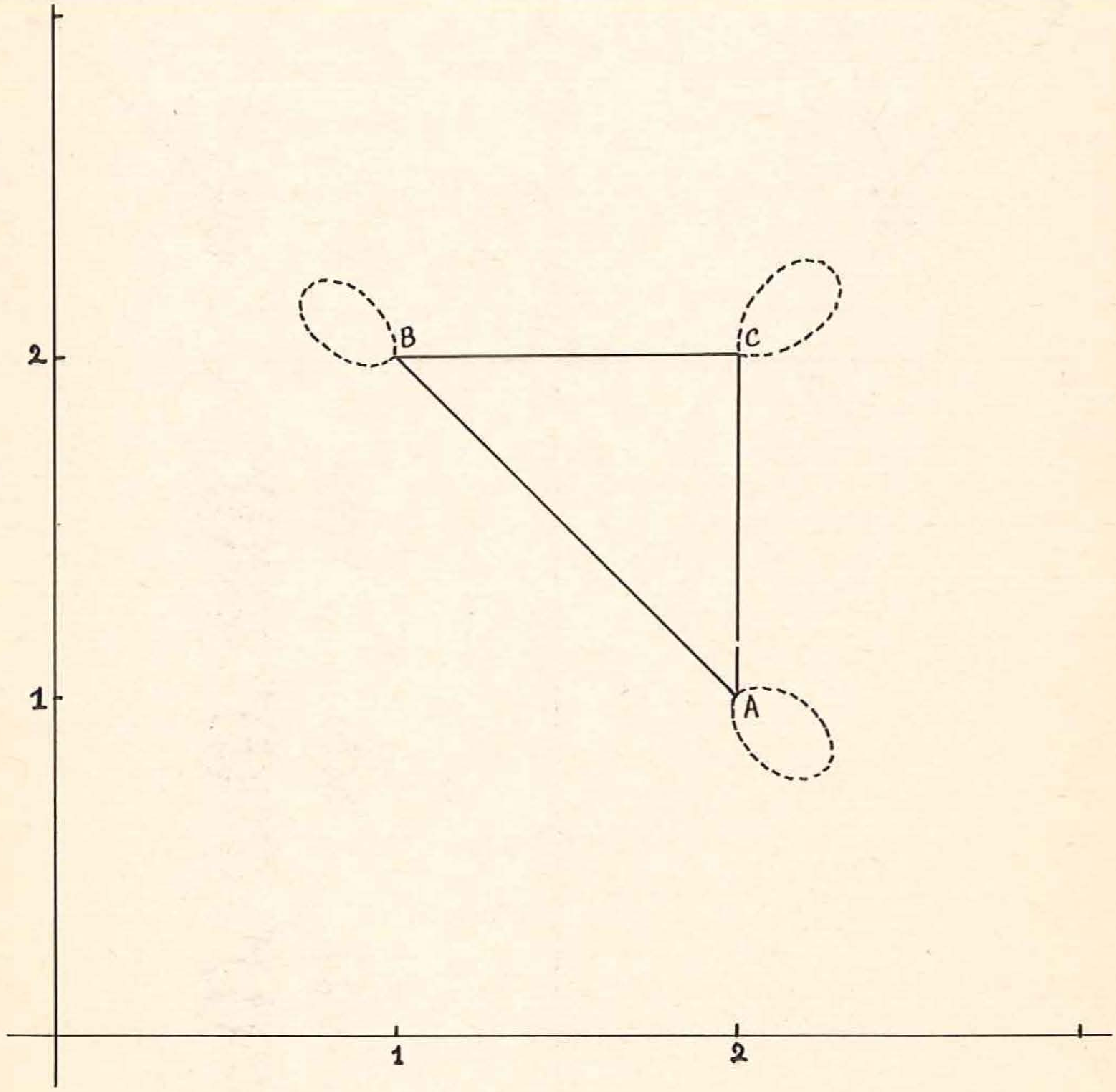
Une autre symétrie.



Un élève découvre avec surprise la transformation identique :
« C'est curieux, dit-il, chaque point reste où il est ! »

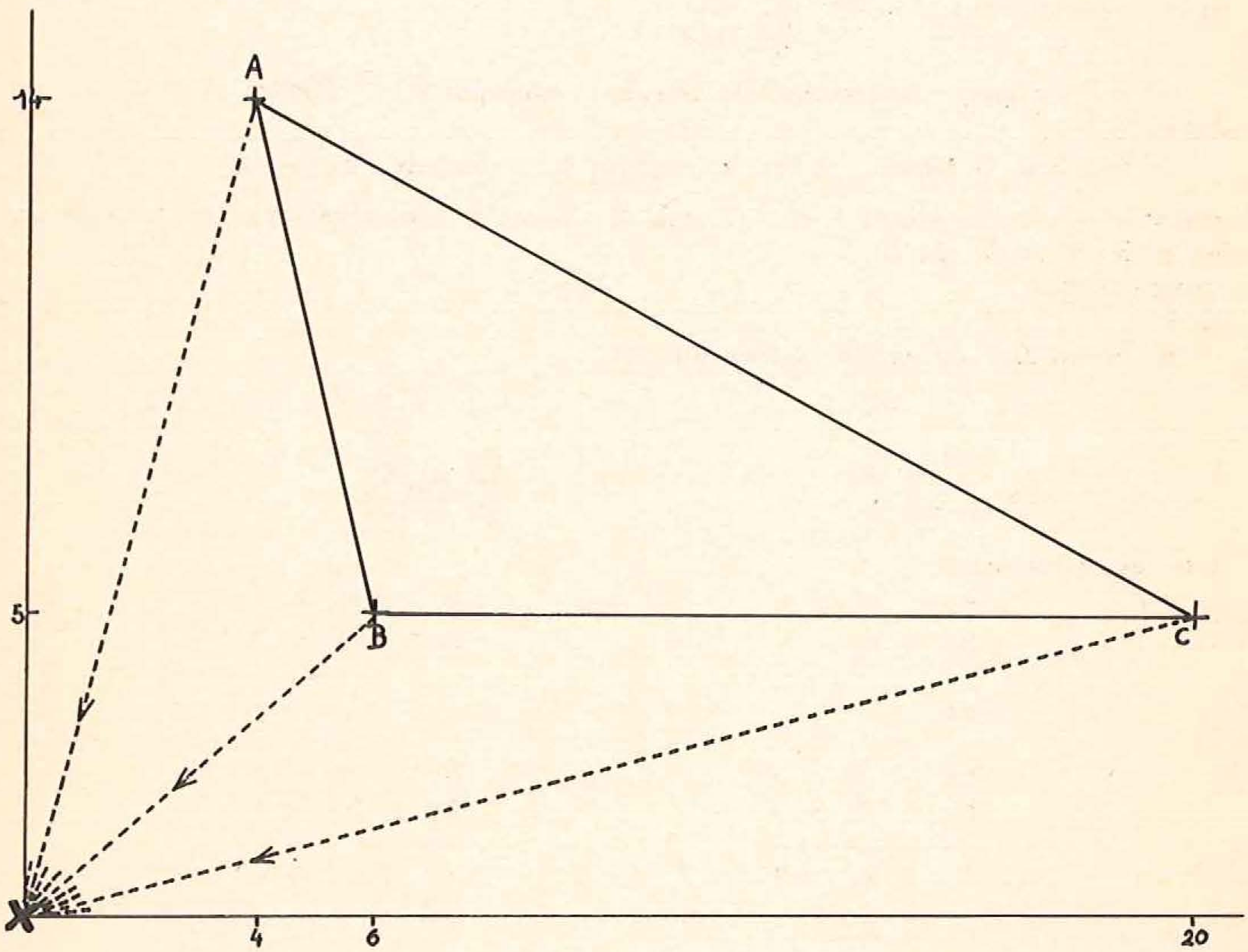
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} A \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} B \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} C$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Autre surprise ! : l'opérateur zéro.

A	B	C
$\begin{pmatrix} 4 \\ 14 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



C'est alors qu'est posé par les élèves le problème de la recherche de la matrice d'une transformation donnée.

Voici des extraits de ces tâtonnements longs et difficiles :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}\end{array}$$

soient les points (2 ; 1) et (2 ; 2) qu'une transformation linéaire déplace en (4 ; 3) et (4 ; 4)

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1&2\\\cdot&\cdot\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}4\\\cdot\end{pmatrix}\end{array} \qquad \text{mais...} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1&2\\\cdot&\cdot\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}6\\\cdot\end{pmatrix}\end{array} \text{ (6 au lieu de 4 !)}$$

enfin la matrice est trouvée : $\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}$

« *Parce que c'était facile, dit Christian, mais les plus difficiles, je ne les ai pas trouvées.* »

Sur leur demande, je leur ai indiqué la résolution algébrique

exemple : soient les points A (2 ; 1) et B (2 ; 2) qu'une matrice inconnue transforme en A' (3 ; 1) et B' (1 ; 2),
désignons par
$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ la matrice de cette transformation.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\end{array}$$

nous pouvons écrire :

$$\begin{array}{l} 2a + b = 3\\ 2c + d = 1\end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{l} 2a + 2b = 1\\ 2c + 2d = 2\end{array}$$

ou

$$\begin{array}{r} 2a + b = 3\\ 2a + 2b = 1\\ \hline b = -2\end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{r} 2c + d = 1\\ 2c + 2d = 2\\ \hline d = -1\end{array}$$

d'où $a = 2{,}5$ et $c = 1$
et la matrice est donc :

$$\begin{pmatrix}2{,}5 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

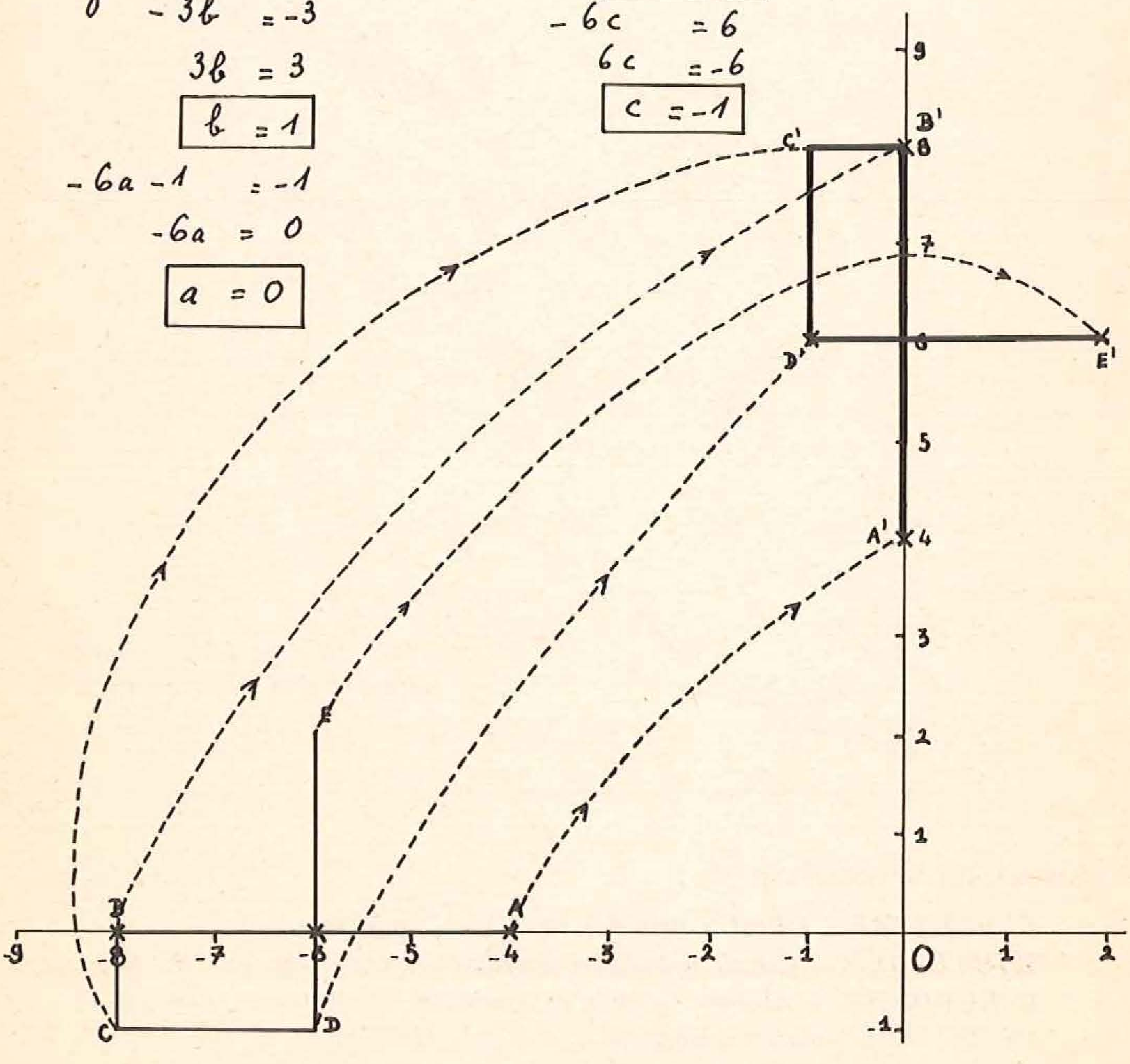
Voici la recherche de la matrice d'une transformation :

A	B	C	D	E
-4 0	-8 0	-8 -1	-6 -1	-6 +2
0 **4**	**0** **8**	**-1** **8**	**-1** **6**	**2** **6**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

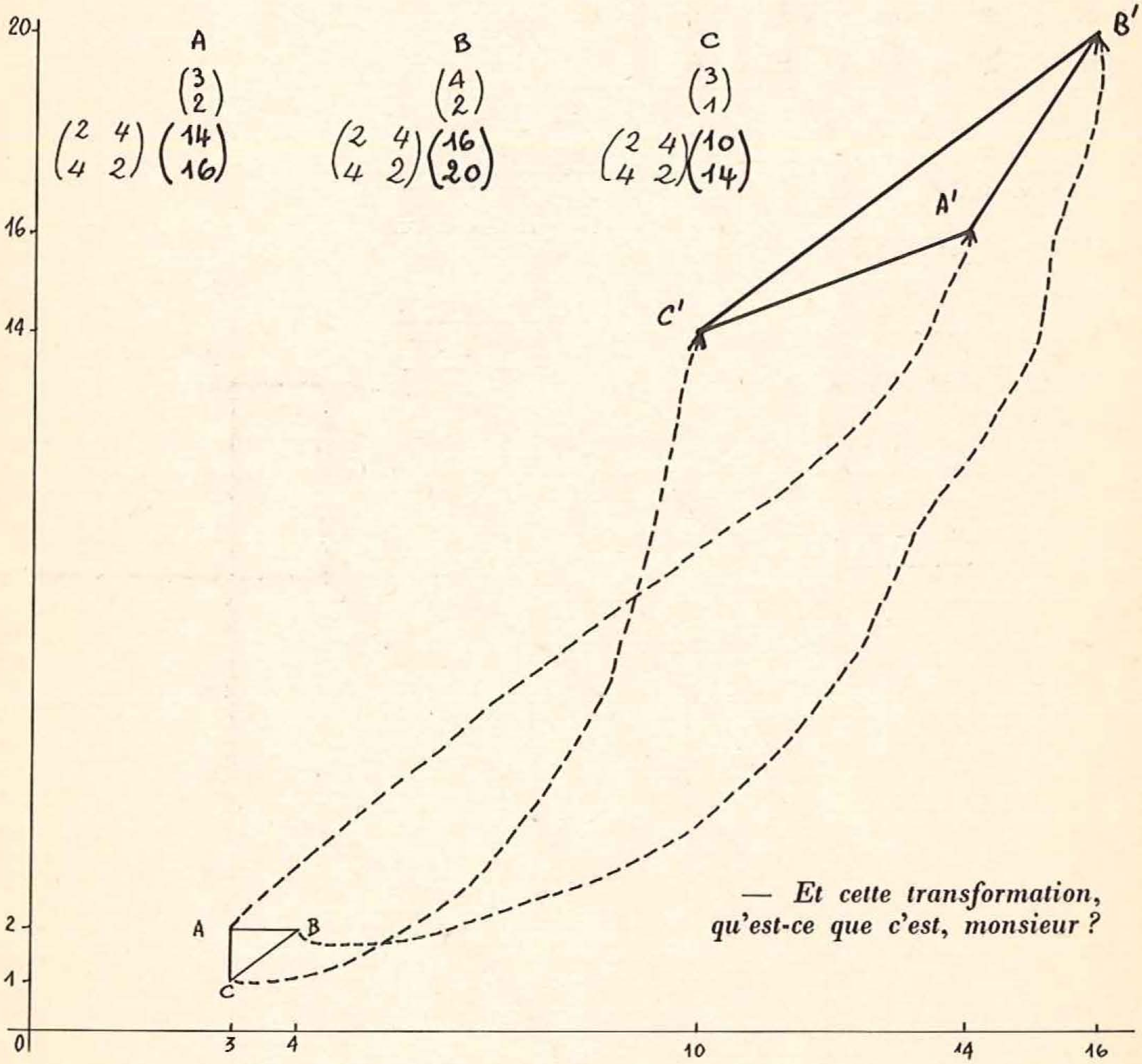
$$\begin{array}{rcl} -6a - 1b &=& -1 \\ -6a + 2b &=& 2 \\ \hline 0 \quad -3b &=& -3 \\ 3b &=& 3 \\ \boxed{b = 1} && \\ -6a - 1 &=& -1 \\ -6a &=& 0 \\ \boxed{a = 0} && \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} -6c - d &=& 6 \\ -6c + 2d &=& 6 \\ \hline 0 \quad \boxed{d = 0} && \\ -6c &=& 6 \\ 6c &=& -6 \\ \boxed{c = -1} && \end{array}$$



Il y eut une petite déception : un élève ayant cherché avec 2 points A et B la matrice d'une translation ne comprenait pas pourquoi elle ne « marchait » pas avec les autres points.

Je lui ai demandé de bien observer comment les matrices transforment le point zéro $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$



— Et cette transformation, qu'est-ce que c'est, monsieur ?

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE :

BLAQUIERE - Calcul matriciel - tome 1 *- (Hachette)*
BOUTELOUP - Calcul matriciel élémentaire - « Que sais-je » n° 927
DIEUDONNE - Algèbre linéaire et géométrie élémentaire - (Hermann)
PAPY - Mathématique moderne - tome 6 *- (Didier)*

La directrice de la publication : E. FREINET — Printed in France by Imprimerie CEL — Cannes — Dépôt légal : 1er trimestre 1970 — N° d'édition 194 — N° d'imp. 1 396 — Prix du numéro simple 1,50 F