Présentation de deux recherches articulées au CM2

La présentation de ces deux recherches est pour nous l'occasion d'expliciter le modèle mathématique sur lequel s'appuie notre travail.

La première recherche, d'origine empirique, permet la mise en évidence d'un outil qui permet la résolution de la situation traitée. C'est une situation de proportionnalité qui nécessite l'usage des opérateurs.

La seconde, d'origine purement numérique, permet d'étudier la nature de cet outil (les opérateurs) devenu objet mathématique et la structure d'un ensemble de ces objets (les opérateurs), muni d'une loi de composition interne.

Remarque : pour simplifier la présentation, les moments de travail individuel sont marqués I et les moments de travail collectif C.

Recherche n° 7 (CM2)

Intitulé : les moutons.

Lors de la visite d'une bergerie, le berger a dit aux enfants qu'il donnait une botte de foin pour 15 brebis et qu'une botte pesait entre 15 et 20 kilogrammes. Il leur a également précisé que cela leur ferait un bon problème de mathématique.

Déroulement :

1) La mise en place de la situation (50 mn environ)

C : pour lancer la recherche, le groupe récapitule ce que le berger a dit et l'enseignant écrit au tableau :

Le berger nous a dit :

a) qu'il donne une botte de foin pour 15 brebis

b) une botte pèse entre 15 et 20 kilogrammes

c) il a 30 brebis

d) il leur donne à manger 2 fois par jour.

Ensuite l'enseignant pose la question : ***« Que fait-on avec cela ? »***

Réponses :

- ***On n'a qu'à essayer de trouver combien mange une brebis.***
- ***En combien de temps une brebis mange une botte ?***
- ***Quand on donne une botte, combien une brebis mange dans la botte ?***

I : les questions écrites au tableau et sur la recherche, les enfants traitent une des trois.

L'enseignant précise : ***« Il faut montrer comment vous trouvez votre réponse. Nous sommes en mathématiques. Ce qui est important c'est autant la réponse que la façon dont vous la trouvez. »***

C : Le groupe confronte ensuite les modes de représentations et de résolutions utilisés :

a) la question sur le temps est éliminée par un certain nombre d'enfants car il manque des données. Mais celui qui l'a posée dit qu'on ne l'a pas compris. Il précise et la question devient :

Combien de temps dure une botte pour une brebis ?

b) une enfant dit que les brebis ne mangent pas toutes la même chose et qu'en conséquence, on ne peut pas calculer combien chaque brebis mange.

La discussion s'engage. Nous concluons sur le fait que nous sommes en mathématiques, que cela nous permet de prendre une décision, à savoir qu'elles mangent toutes la même quantité, et qu'ainsi la situation peut être traitée. Mais cette décision n'a rien à voir avec la réalité.

c) le fait que le poids de la botte ne soit pas connu précisément gêne un certain nombre d'enfants.

Certains ont délibérément choisi un poids précis, parfois même le plus simple, à savoir 15 kilogrammes. Or la situation ne précisant pas le poids mais un écart, nous cherchons à la traiter en tenant compte de l'énoncé et en trouvant une écriture qui permettrait de rendre compte du résultat.

Remarque : la difficulté ici consiste à aborder la notion de continuité entre deux bornes.

Nous avons conscience que le traitement ayant concerné uniquement les bornes, la notion de continuité n'a pas été véritablement comprise par les enfants.

A la suite de ce travail, une fiche guide est élaborée sur la question choisie, ici celle sur ce que mange une brebis par jour. ***Voir illustration n°1.***

FICHE GUIDE:

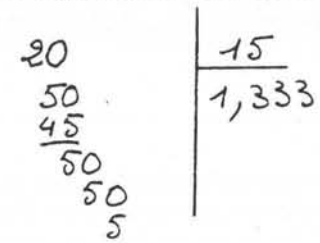
Question:combien une brebis mange dans la botte?

Aurélie:

Je suppose qu'une botte pèse 15 kg,alors une brebis mange 1kg
Je suppose qu'une botte pèse 20 kg,alors une brebis mange:

20 : 15 = 1,333

une brebis mange 1,333 kg.



Comme la botte pèse entre 15 et 20 kg,on peut dire qu'une brebis mange entre 1 et 1,333 kg.

On peut écrire:

1 kg < une brebis mange < 1,333 kg.

Illustration n° 1

« Une brebis mange » est l'expression écrite qui désigne la quantité de fourrage. Tout au long de la recherche, cette écriture va se modifier. Ex : « 3 b » désigne « ce que 3 brebis mangent ».

Par rapport à la situation initiale, les paramètres sur le temps ont été éliminés. Cela correspond à une épuration de la situation empirique qui devient une situation problème caractéristique de la proportionnalité. Cette épuration, acceptée par le groupe, permet la constitution d'une base de travail commune.

La séance de mise en place de la recherche est ainsi terminée. Les enfants vont pouvoir la traiter individuellement.

2) La recherche

Afin de comprendre le fonctionnement du travail, il convient ici de définir le principe de « routine » qui permet aux enfants de travailler seuls.

Lorsqu'une recherche est en route, les enfants savent qu'ils peuvent exercer un certain nombre de variations tant numériques que structurelles.

La nature et l'amplitude de ces variations se construisent au fur et à mesure des recherches en fonction des concepts travaillés. Ainsi, dans les exemples qui suivent, on peut remarquer :

– que les données numériques de départ sont différentes de celles de la situation initiale et sont différentes d'un enfant à l'autre ;

– que les données numériques d'un tableau à l'autre ne sont pas les mêmes.

De façon très simple, la variation numérique permet une liberté d'action qui autonomise le travail rapidement.

I : Les enfants continuent à travailler la recherche.

Les travaux font apparaître des difficultés en relation directe avec la résolution d'un tableau de proportionnalité. L'enseignant intervient auprès de chaque enfant pour relever les erreurs initiales. ***Voir illustration n°2.***

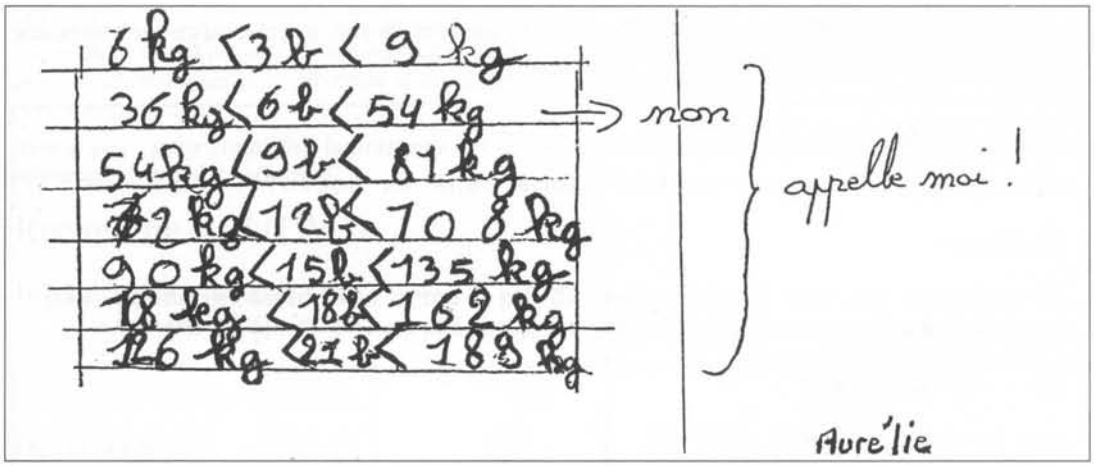


Illustration n° 2

Aurélie multiplie les données numériques initiales sur le fourrage (6 kg et 9 kg) par le nouveau nombre de brebis pour calculer le nouveau résultat. (Pour l'avant-dernière ligne, 108 = 6 x 18 ; 162 = 9 x 18.)

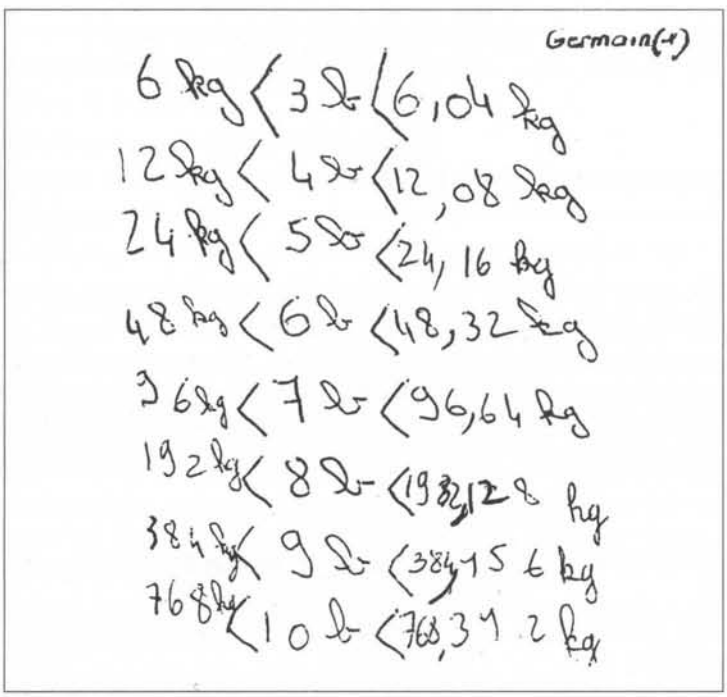


Illustration n° 3

L'erreur ne porte donc pas sur les calculs mais sur la maîtrise du tableau de proportionnalité.

Voir illustration n° 3 : Germain fait fonctionner deux algorithmes différents :

(+ 1) pour le nombre de brebis

(x 2) pour la quantité de fourrage mangé.

Dans un premier temps, les enfants inventent des tableaux.

Il faut remarquer que certains ont tendance à anticiper le résultat. Ils utilisent ainsi des connaissances antérieures stabilisées qui leur permettent d'assurer la réussite de leurs essais. Mais ils ne construisent pas nécessairement de problématique et peuvent

s'engager dans un cheminement sans objectif précis. ***Voir illustration n° 4.***

a) Germain utilise un algorithme qui permet de passer d'une ligne à l'autre en multipliant par 2 ;

b) cet algorithme disparaît pour laisser la place à d'autres multiplications : x 4 ; x 5 ; x 2 ; etc.

Intervient une erreur de calcul qui n'invalide pas pour autant la procédure.

L'enseignant peut alors intervenir de façon individuelle ou collective pour mettre en place des obstacles qui vont les amener à adapter leurs stratégies antérieures pour réussir dans la nouvelle situation (N° 1).

Ainsi une fiche comportant de nouveaux essais est donnée. Elle couvre l'ensemble des processus de résolution possibles dans une situation de proportionnalité. ***Voir illustration n° 5.***

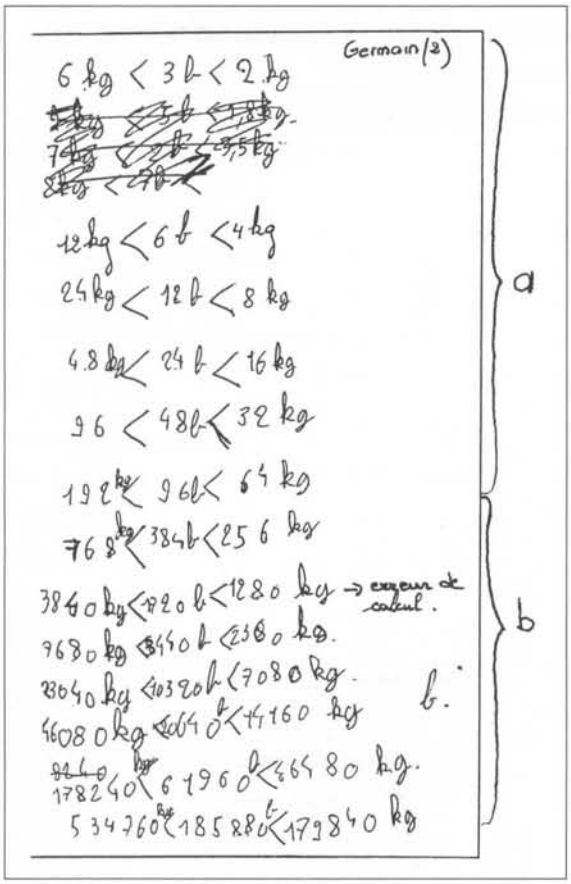


Illustration n°4

TABLEAU DE PROPORTIONNALITE.

Situation n° 1:

5brebis mangent 15 kilogrammes de fourrage

5 b----------> 15 kg

32 b----------> .

Situation n° 2:

7 b----------> 11 kg

42 b----------> .

Situation no 3:

12 b----------> 21 kg

32 b----------> .

Situation no 4:

23 b----------> 31 kg

51 b----------> .

Illustration n°5

Les enfants la traitent dans la suite de leur recherche puis reprennent leurs essais.

Deux difficultés apparaissent :

a) comment trouver une étape qui permette de passer d'un nombre à l'autre. Ce problème relève du concept de multiple et de nombre premier. Il peut être illustré par la situation N° 3 de l'illustration n° 5.

La situation initiale est :

12 b ————> 21 kg

Germain cherche pour 24 brebis et trouve :

24 b ————> 42 kg

Puis pour 32 brebis, il ajoute 8 et trouve :

32 b ——————> 50 kg.

32 n'étant pas un multiple de 12, Germain ne trouve pas de multiplication pour passer de l'un à l'autre. Il retourne alors à une procédure erronée qu'il semblait pourtant avoir abandonnée.

Suite à l'intervention de l'enseignant, Germain parvient à trouver une solution, mais après des tâtonnements qui montrent son manque d'assurance.

b) comment trouver un opérateur multiplicatif entre deux nombres. ***Voir illustration n° 6.***

C : La séance collective suivante permet :

– de faire émerger par la différence des procédures la question de la validité ou non des résultats ;

– l'aide au traitement des erreurs ;

– la mise en forme d'une fiche guide qui va stabiliser les concepts étudiés. ***Voir illustration n° 7.***

Lors de ce travail, l'utilisation des opérateurs pose donc problème.

Le groupe décide de consacrer une recherche à ce concept particulier.

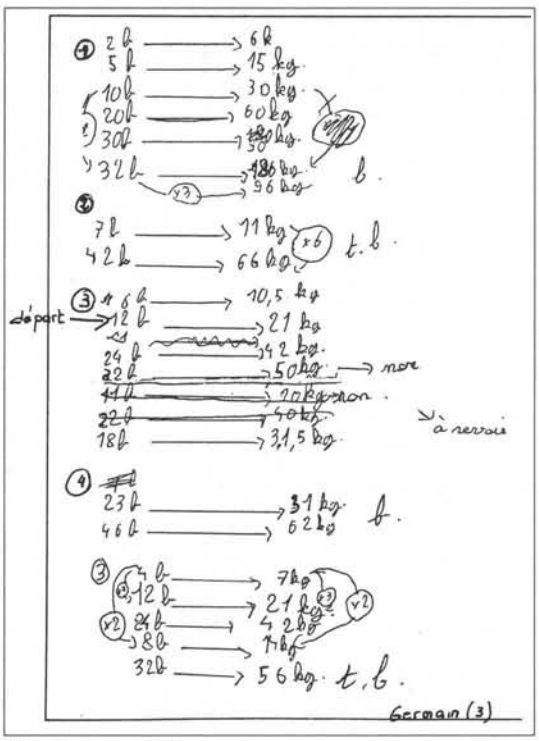
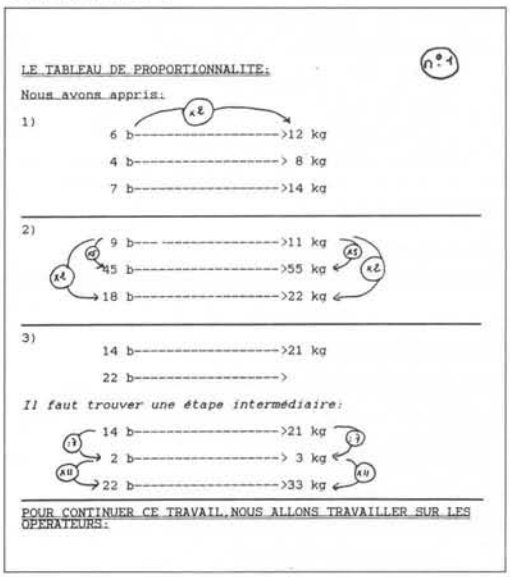


Illustration n°6

Illustration n°7



Recherche n° 8 (CM2)

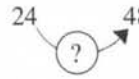
Intitulé : les opérateurs.

Déroulement

1) La mise en place de la situation

(Cette mise en route se fait à la fin de la situation sur les moutons.)

C : Le problème posé est rappelé :



2) La recherche

I : En travail individuel, les enfants vont choisir des couples de nombres et chercher l'opérateur qui les relie. ***Voir illustration n° 8.***

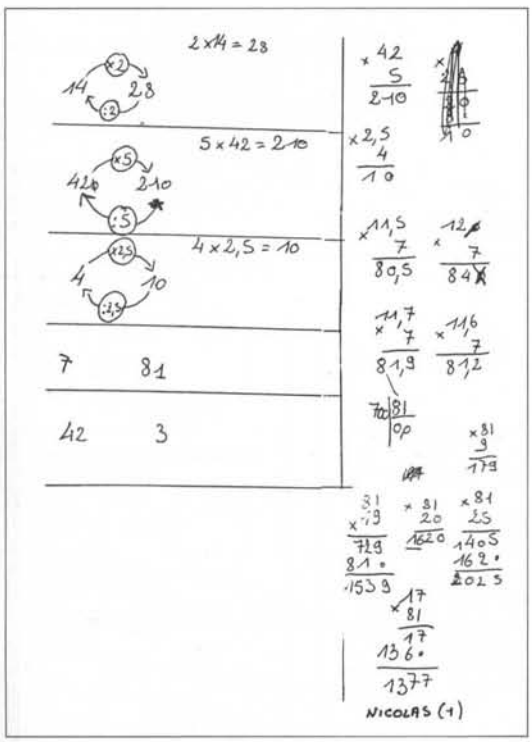


Illustration n° 8

C : Lors de la séance collective suivante, plusieurs questions sont soulevées :

a) il y a des opérateurs que l'on trouve facilement quand on identifie qu'un nombre est multiple de l'autre ;

b) pour d'autres couples, il faut trouver un mode de calcul. L'utilisation de la division apparait.

Mais là, on trouve plusieurs possibilités :

– l'opérateur existe et il est entier

– l'opérateur existe et il est décimal

– on ne trouve pas l'opérateur

c) on peut trouver deux opérateurs qui ont le même sens. Cela dépend de la division que l'on calcule.

d) le signe est parfois difficile à trouver et on n'est pas certain du résultat.

Il faut donc trouver un moyen de vérification : la mise en oeuvre de l'opérateur trouvé sur le nombre de départ.

Exemple : dans la fiche précédente, Nicolas a trouvé que :

l'opérateur reliant 4 à 10 est x 2,5.

Pour vérifier, il fait : 4 x 2,5 = 10

L'opération inverse : 10 x 2,5 ≠ 4 lui permet de vérifier le sens de l'opérateur.

I : Les enfants continuent leur recherche en essayant de tenir compte de ces découvertes. Les conseils suivants sont écrits en entête :

– Chercher si l'opérateur existe.

– Chercher s'il est unique.

– Vérifier son résultat.

Voir illustration n° 9.

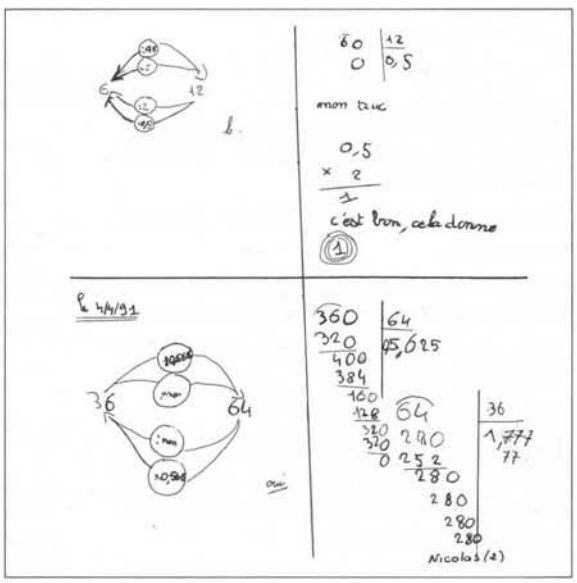


Illustration n° 9

C : Les conditions d'existence et la nature de l'opérateur étant stabilisées, le groupe se pose la question du travail à poursuivre.

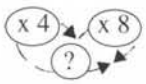
Des travaux précédents utilisant des opérateurs nous amènent à poser la question de la composition de deux d'entre eux.

De plus, une recherche sur les opérateurs additifs qui a été travaillée pendant l'année (l'ascenseur) nous semble pouvoir être transposable.

Ces deux références vont nous guider pour poser le nouveau problème.

Il est décidé de ne travailler qu'avec des opérateurs entiers afin de faciliter notre recherche.

Il est écrit au tableau :



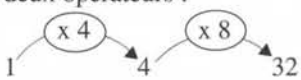
L'enseignant demande aux enfants s'ils connaissent le résultat.

Les réponses suivantes sont apportées :

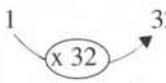
x 12 ; x 32 ; x 2

Suite à ces multiples réponses, la question de la vérification est à nouveau posée.

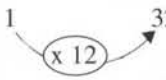
Les enfants décident d'utiliser un nombre de départ puis de calculer ses images en faisant fonctionner les deux opérateurs :



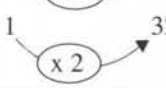
Ensuite, ils vérifient la validité des propositions :



oui



non



non

En faisant fonctionner l'opérateur unique, ils peuvent ainsi vérifier leurs résultats. ***Voir illustration n° 10.***

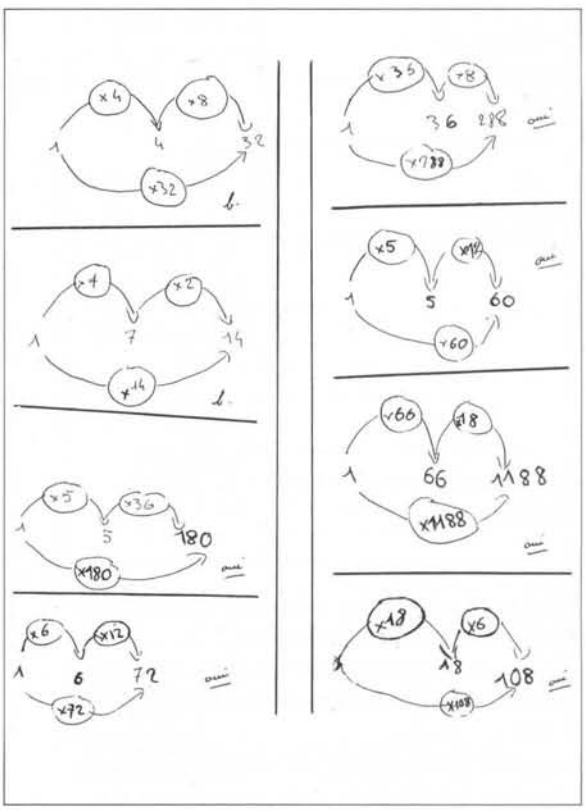
Il est ainsi vérifié que le résultat x 32 est le seul valide.

Mais si les autres ne sont pas justes, comment peut-on faire pour trouver le résultat sans se tromper ? Existe-t-il un truc ? (Aurélie CM2)

Le groupe se met alors en recherche pour voir s'il existe un truc qui va finalement s'appeler loi (par référence à la réunion de coopérative) puis règle.

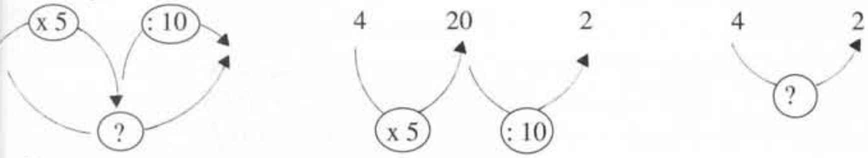
La recherche se fait d'abord sur les couples (x ; x) puis sur les couples (: ; :) et enfin sur (x ; :) et sur (: ; x). Ainsi quatre étapes sont mises en évidence. Celles-ci sont issues de la mise en parallèle de la recherche sur les opérateurs additifs (l'ascenseur).

Illustration n° 10



La question du *« comment faire pour trouver »* trouve pour première réponse : utiliser les nombres de départ et leur arrivée. Ainsi ces nombres, d'outils de vérification, deviennent aide à la construction d'hypothèses

Exemple :

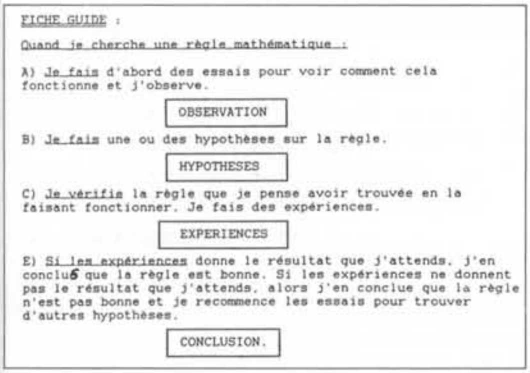


I :

C : Lors de la confrontation, deux questions sont abordées

a) comment fait-on pour trouver ?

L'observation des travaux amène à constater que l'utilisation d'un nombre de départ ne suffit pas. En effet, deux opérateurs, l'un additif et l'autre multiplicatif sont validables. Après recherche, seul l'opérateur multiplicatif reste opérant. Exemple :



FICHE GUIDE :

Quand je cherche une règle mathématique :

A) Je fais d'abord des essais pour voir comment cela fonctionne et j'observe.

OBSERVATION

B) Je fais une ou des hypothèses sur la règle.

HYPOTHESES

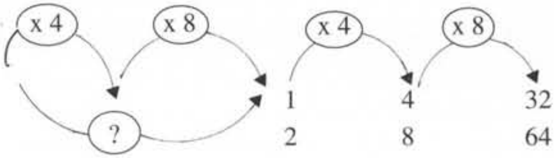
C) Je vérifie la règle que je pense avoir trouvée en la faisant fonctionner. Je fais des expériences.

EXPERIENCES

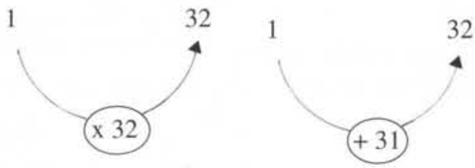
E) Si les expériences donne le résultat que j'attends, j'en conclus que la règle est bonne. Si les expériences ne donnent pas le résultat que j'attends, alors j'en conclue que la règle n'est pas bonne et je recommence les essais pour trouver d'autres hypothèses.

CONCLUSION.

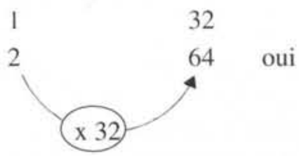
Illustration n° 11



propositions :



mais :



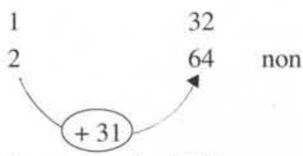
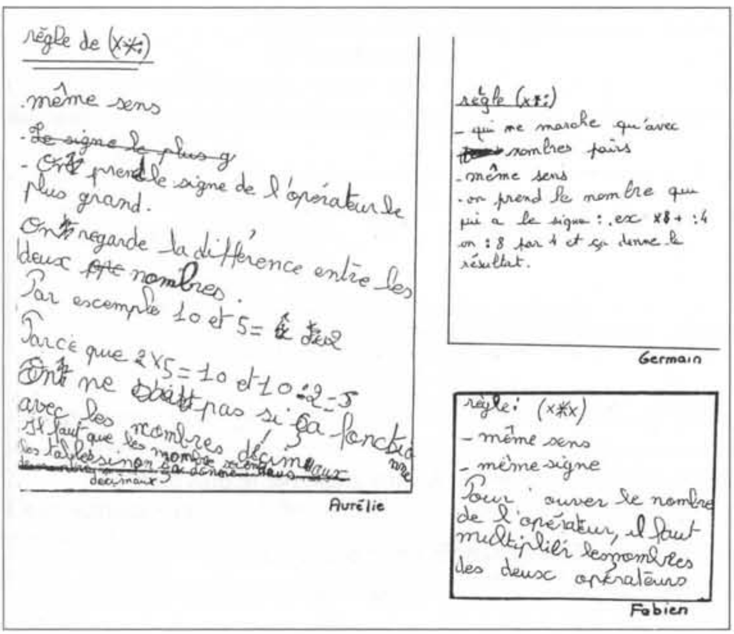


Illustration n° 12



Pour utilisation ultérieure, une fiche guide sur la recherche d'une règle est fabriquée. ***Voir illustration n° 11.***

b) l'écriture de la règle.

Plusieurs écritures d'une même règle sont proposées. Elles sont exposées, amendées par emprunt à divers auteurs et complétées.
Voir illustration n° 12.

Les points à traiter sont mis en évidence :

– le sens

– le signe

– le calcul du nombre

Remarque : c'est en fait ici que les attributs de l'opérateur sont construits de façon explicite.

I : Si les règles de composition (x * x) et (x * :) ont été mises au point alternativement en travail individuel et confrontation collective, la dernière règle (: * :) a été entièrement élaborée par chaque enfant (voir ci-dessous).

Fabien suit le cheminement proposé dans la fiche guide :

1) il observe

2) il suppose

3) et 4) il vérifie

5) il conclut.

Nous pouvons remarquer que l'énoncé produit est parfaitement correct et que Fabien valide lui même sa proposition. ***Voir illustration n° 13.***

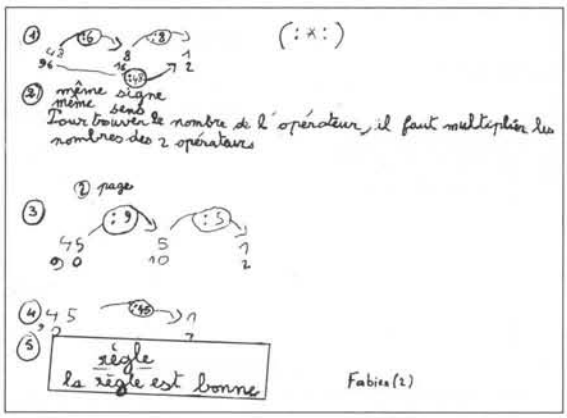


Illustration n° 13

C : A la fin de ce travail, une fiche récapitulative est construite.

1) x * x ou : * :

même signe

même sens.

Pour trouver le nombre de l'opérateur, on multiplie les nombres des 2 opérateurs.

2) x * : ou : * x

même sens.

a) signe du plus grand.

Pour trouver le nombre de l'opérateur, on divise le nombre le plus grand par le plus petit.

b) signe du plus petit.

Pour trouver le nombre de l'opérateur, on divise le plus petit par le plus grand.

Il faut donc, pour que l'opérateur existe, que le nombre qu'on divise soit un multiple de l'autre.

L'enseignant pose alors la question suivante :

« Etes-vous certains que vos règles soient exactes ? »

Suite à la réponse affirmative du groupe, il reprend :

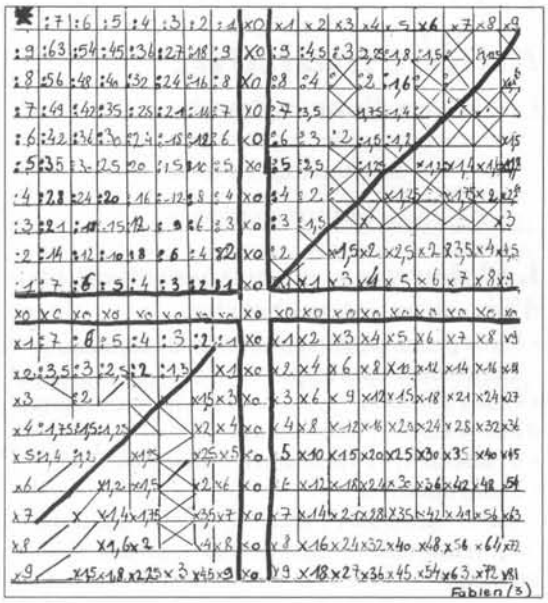
« Pouvez-vous prouver qu'elles fonctionnent pour tous les nombres entiers et qu'il n'en existe pas un pour lequel cela ne fonctionne pas ? »

Il ressort de la discussion qu'il faudrait essayer pour tous les nombres et que cela est impossible.

L'enseignant conclut que pour l'instant elles sont considérées comme valides et que les enfants seront amenés à apprendre plus tard au collège comment montrer qu'une règle fonctionne sur tous les nombres ou non.

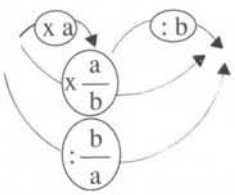
Comme il a été fait pour les opérateurs additifs, l'enseignant propose de construire un tableau de composition des opérateurs sur le modèle de celui fabriqué lors de la recherche sur les opérateurs additifs et soustractifs (ascenseur).

Illustration n° 14



I : ***Voir illustration n° 14.***

Dans ce tableau apparaissent les opérateurs entiers, les décimaux et les couples pour lesquels on ne peut calculer le nombre. L'existence de ces nombres est mise en évidence. Elle est caractérisée par l'écriture suivante qui est mise en relation avec les fractions.



C : Une fiche récapitulative est construite avec les principales observations issues de la dernière séance de confrontation qui clôt la recherche.

Les opérateurs

Nous avons appris :

x 0 : est un élément absorbant car, quand on multiplie par 0, on trouve toujours 0.

x 1 ou : 1 est un élément neutre car, quand on multiplie ou qu'on divise par 1, on trouve le même nombre.

L'opération * est commutative, car en regardant le tableau, on voit qu'elle marche dans les deux sens.

Deux semaines plus tard, les enfants ont à travailler un brevet qui rassemble l'ensemble des concepts explorés. Les résultats sont reportés sur la grille qui se trouve à l'avant du cahier de chacun.