

Éloge de l'erreur en mathématiques

Depuis plusieurs années, j'ai souvent réfléchi et travaillé sur les mathématiques, leur apprentissage par l'enfant et leur enseignement par l'adulte.

Il n'est pas dans mon intention de donner ici des leçons, mais de rendre compte de ma pratique pédagogique et de la justifier d'un point de vue didactique et théorique.

Le désir de l'enfant

Presque tous les discours pédagogiques escamotent, très allègrement, un facteur essentiel à tout apprentissage : **le désir de l'enfant**.

Chaque enseignant sait très bien (à juste titre d'ailleurs) que celui-ci dépend pour beaucoup du **milieu** socio-culturel familial.

Les mathématiques sont, *a priori*, un domaine où l'emprise de ce milieu devrait être moins importante que dans des matières plus culturelles (français, histoire, art), bien que **le langage** ait un rôle non négligeable en math.

A ce sujet, la réforme des mathématiques modernes qui adoptait implicitement ce postulat, espérait, par sa nouveauté, une « démocratisation » des mathématiques et la réduction de leur rôle sélectif et ségréatif.

Après l'échec de cette tentative généreuse, force est de constater que **c'est dans cette discipline que l'on voit, plus que partout ailleurs, faiblir, puis disparaître, le désir de nombreux enfants.**

Donc, la perte du désir des enfants pour les mathématiques est un problème.

Les problèmes posent problèmes...

D'une façon générale, les problèmes, en math, nous posent des problèmes, à nous comme aux enfants, pour nous et pour nos élèves.

C'est Paul le Bohec, un vieux militant du Mouvement Freinet qui me l'a fait découvrir.

Avez-vous remarqué **l'embarras** que nous éprouvons lorsqu'on nous propose, dans un cadre scolaire, de répondre à un problème, mathématique ou autre ?

Nous nous empressons de rechercher dans nos connaissances scolaires ou universitaires **une réponse rassurante** qui nous délivrera de la **situation d'infériorité** dans laquelle celui qui sait nous a placés.

Savoir = dominance, ignorance = soumission.

L'absence de réponse entraîne un certain **malaise**.

Je prends comme exemple deux situations auxquelles j'ai participé.

1. Un « formateur » propose :

On « numérote » de la façon suivante les doigts de la main. Où se trouve le nombre 436 ?



Et nous voilà rapidement lancés à chercher du côté des restes de la division par 5. En vain...

2. Au cours d'un stage vidéo, le formateur nous fait visionner une séquence en nous réclamant d'être attentifs. A l'issue de la « leçon » la question tombe :

« Qu'avez-vous remarqué ? »

Silence... Bon sang, je dois être « nul ». Je n'ai rien remarqué.

Bon, j'essaie de réfléchir... Le cadrage ? Un travelling ? On ressort les « Cahiers du cinéma »... Eh non !

Réponse : Quand le personnage sort à droite de l'écran, il réapparaît à gauche.

Bien sûr, on peut toujours, nous adultes, **échapper** à cette situation. De la même façon, j'en parlerai plus loin, les enfants ont aussi **des comportements** « d'évitement ».

L'anxiété devant une question...

A la suite de nombreuses observations, j'ai pu constater, chez les enfants, que toute question

mathématique, lorsqu'elle **échappe au schéma stimuli - réponse - réflexe**, c'est-à-dire lorsqu'elle **nécessite une recherche**, entraîne suivant les individus une certaine **anxiété**.

J'entends par **schéma stimuli-réflexe**, les situations du type :

6 x 8 = ... ; un angle droit mesure ... ; J'ai 12 billes vertes et 7 rouges. Combien j'ai de billes « en tout » ?

... dépend de plusieurs paramètres

L'intensité de cette **inquiétude** dépend de plusieurs paramètres dont la nature et l'importance varient suivant les enfants. Je peux citer entre autres :

- absence de points d'appui pour résoudre le problème posé (concepts inexistant, représentation symbolique erronée, démarche peu maîtrisée) ;
- valorisation excessive de la réussite et peur de mal faire ;
- fatigue physique ou problèmes psychologiques momentanés ;
- habitude de l'échec, autodévalorisation et mécanismes d'inhibition qui en résultent.

Cette inquiétude, somme toute naturelle, est plus facilement acceptée par ceux qui ont l'habitude de la surmonter (les bons en math).

Angoisse, évitement, échec

Par contre, pour d'autres, cette **inquiétude** sera **plus forte**, et elle risquerait de se transformer en « **angoisse** » si **des moyens d'évitement** n'apparaissaient pas spontanément.

On peut cependant observer quelquefois des visages d'enfants qui traduisent de véritables maux, dans des situations où leur désir est fortement impliqué et dans lesquelles ils sont en échec. Ce sont surtout des enfants très scolaires par affectivité, appliqués, qui travaillent pour faire plaisir à leur famille, au maître...

Les mécanismes d'évitement (1)

Les mécanismes d'évitement sont divers et surtout mal perçus par les enseignants. En voici quelques-uns :

- désintéressement pour la recherche et fuite dans une activité plus intéressante (rêverie, bavardage, mouvement, jeux avec des objets, etc.) ;
- proposition d'une réponse fautive, voire incongrue, qui sert d'alibi, de fin de recherche (qui n'a

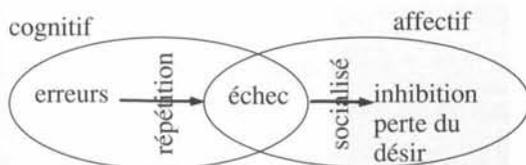
jamais prononcé : « *tu ne réfléchis pas, tu réponds n'importe quoi.* ») ;

- rejet pur et simple de la question, soit immédiat, soit en cours de recherche, rejet dont les justifications peuvent être diverses :

- dévalorisation de la question « *c'est pas intéressant* » ;
- dévalorisation du « questionneur » (rare en milieu scolaire, car « le maître » est détenteur du savoir) ;
- transfert de la responsabilité de l'échec pas toujours injustifiée (*on ne l'a pas appris, on ne l'a jamais fait, c'est trop dur, etc.*) ;
- excuse de type sportif (« *je ne suis pas en forme* ») ;
- autodévalorisation de l'enfant (*je n'y comprends rien, moi, je suis nul en math*).

Les répétitions de ces comportements et les mécanismes de renforcement de l'échec qui en résultent, entraînent de véritables inhibitions « **cognito-affectives** » (2) dans les apprentissages mathématiques.

L'essentiel, pour moi, consiste à conserver à l'échec un caractère **cognitif** sans acquérir un caractère social dévalorisant.



Ce qui ne veut en aucun cas dire : c'est bien de se tromper. Mais au contraire, c'est dire aux enfants :

« Tu n'y arrives pas, tu n'es pas anormal, tout le monde se trompe un jour ou l'autre. Réfléchis, cherche, fais-toi aider ; ça viendra. »

L'erreur, nécessaire, naturelle

Il n'est pas question de fantasmer sur un mythe égalitariste à propos des mathématiques, mais il est possible de réduire et de combattre ces phénomènes, de ne pas tuer le désir, d'atténuer l'aspect élitiste et hyper sélectif des mathématiques, en essayant de **permettre à chaque enfant de s'approprier des savoirs mathématiques d'une façon plus efficace pour lui**.

Cela sera possible si l'on reconnaît l'erreur et même l'échec comme **un phénomène normal dans l'apprentissage**.

Je me permets ici de citer Stella Baruk, professeur de math, auteur de nombreux livres sur l'enseignement des mathématiques :

« Les erreurs ? Si elles cessent d'être disqualifiantes, infâmantes pour devenir objet de savoir pour le professeur, dynamique de savoir pour l'élève qui apprendra quelles logiques l'ont poussé à répondre comme il l'a fait, et quelle est la logique à laquelle ces logiques mises à jour, légitimées puis évacuées laisseront la place, alors le sens commencera à circuler en classe de mathématiques, dissipant le climat d'angoisse, d'inertie, de rejet ou de violence qui est celui dans lequel vivent la plupart des élèves. »

Actuellement, certains didacticiens et pédagogues des mathématiques comme Brousseau, s'inspirant de Gaston Bachelard et généralisant aux maths l'idée d'**obstacle** épistémologique (3) font de l'erreur, ou plutôt de la **rectification des erreurs, une étape obligatoire de l'apprentissage des structures mathématiques**.

Tous les chercheurs ne sont pas d'accord là-dessus (Fischer : *Acquisition du principe de*

cardinal d'un ensemble) mais on peut affirmer sans crainte, que :

- l'erreur, même si elle n'est pas obligatoire, est une étape normale, **naturelle**.

Je pense cependant que l'erreur reste **une étape nécessaire** dans la résolution de problèmes complexes (ceux qui, justement, posent problème).

Ma « philosophie » des mathématiques peut se résumer à cette stratégie :

- reconnaître l'échec, pour combattre l'échec.

Affirmation que je souhaite compléter par une citation fondamentale de Gaston Bachard (*La formation de l'esprit scientifique*) : « **Erreur, tu n'es pas un mal.** »

L'erreur est un message

Quelles erreurs ?

Si l'on excepte l'erreur individuelle occasionnelle, révélatrice d'un esprit inattentif – celle-ci est assez rare et je me surprends à constater que nous l'attribuons et la pardonnons plus facilement aux bons en mathématiques qu'aux autres – on peut alors affirmer que l'erreur est un message



« clinique », comme un symptôme d'une maladie, de la pensée mathématique des enfants.

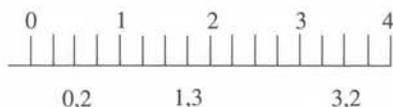
On pourra alors l'utiliser à des fins de corrections individuelles, ou à une éventuelle rectification de notre stratégie mathématique.

On peut rencontrer des erreurs de toute nature :

– l'erreur collective, significative, qui peut nous renvoyer à une réflexion d'épistémologie génétique (stades piagétiens, etc.) ou à notre démarche ;

– l'erreur personnalisée traduit, elle, l'absence ou la maîtrise insuffisante d'un concept, d'une démarche qui sont nécessaires à la réussite (erreur de structure, d'algorithme(4), de représentation symbolique).

Quand Nathalie, élève de CM2, propose cette recherche :



Cela traduit **une représentation mentale** des décimaux complètement erronée.

Si je me contente d'une rectification rapide de ma part, ou si je ne fais rien, cette élève va conserver dans son esprit une image fautive, ce qui ne l'empêchera pas par ailleurs de réussir les transcriptions :

$$0,2 = 2/10$$

$$1,4 = 1 + 4/10$$

$$9,25 = 9 + 2/10 + 5/100$$

Ne pas rectifier de façon profonde **la représentation mentale** erronée d'un enfant, et y plaquer un savoir mathématique à base de vocabulaire me paraît être le danger le plus important de l'enseignement des mathématiques et la source de bien des comportements irréflectifs des enfants par la suite. Ceux-ci s'empresseront de régurgiter leurs savoirs scolaires, plutôt que de mobiliser leur « appareil de raison ».

« **Rendre des résultats plutôt que réfléchir** » ; cf. *L'âge du capitaine*, Stella Baruk.

Pour ma part, je pense que si nous ne « relient » pas les connaissances mathématiques, terminologie et savoirs, avec les représentations mentales profondes des enfants ou bien si nous ne détruisons pas les représentations mentales erronées, nous faisons plus « **de la liturgie, que des mathématiques** » (E. Lémery).

A la limite, on peut affirmer que le fait de ne pas tenir compte de ces représentations (au travers des erreurs) risque de conduire à la mise en place d'un savoir mathématique à **base de terminologie et de situations types**.

La mécanisation de celui-ci est plus proche de la récitation que de l'exercice d'intelligence.

Ce type d'apprentissage sera cependant plus ou moins efficace à long terme, avec les enfants « dociles » et « scolaires » issus des bons milieux socio-culturels, qui sont capables d'écouter, **d'apprendre sans comprendre**, de retenir pour comprendre plus tard et qui souvent bénéficient d'une aide complémentaire à la maison.

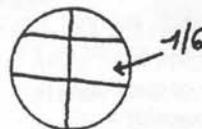
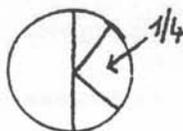
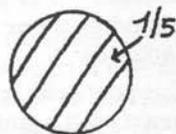
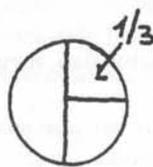
Pour les autres, si le désir de comprendre est diminué par l'erreur dévalorisante et les échecs répétés, si le savoir mathématique n'est pas lié à leur pensée personnelle, alors les mathématiques deviennent une liturgie ennuyeuse, source de souffrance ou de désintérêt.

Au cours moyen première année, « j'ai fait » des leçons sur les fractions : cela a bien marché. La démarche était classique.

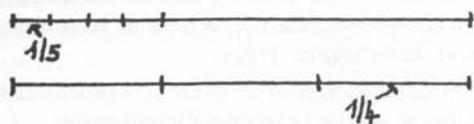
J'avais dessiné des beaux camemberts et des segments prédécoupés.

Par souci de **vérification** et pour tenir compte de mes idées en matière de mathématiques, j'ai demandé aux enfants de partager des gâteaux en trois, en quatre ou en cinq parties égales.

Voici des représentations récoltées :



J'ai fait la même chose avec des barreaux à couper :



Il y aurait beaucoup à dire sur ces différents schémas, mais force est de constater que les représentations des enfants n'étaient pas absolument en accord avec le résultat qu'ils avaient obtenu après une leçon tout à fait habituelle.

Quelle valeur alors peut-on accorder au succès suivant : $1/5 + 2/5 = 3/5$, alors que l'enfant n'a qu'une idée très imparfaite de la notion de fraction ?

De la même façon, il me paraît vain, superficiel et trop ambitieux, d'étudier **les changements d'unités d'aires**, tant que **la notion de surface** n'est pas suffisamment maîtrisée, ou bien lorsque (et on le constate souvent) il y a encore confusion entre **surface** et **périmètre**.

A ce sujet, les livres de maths sont souvent trop ambitieux (puissances décimales, organigrammes complexes, etc.).

Une statistique nationale nous incite à réfléchir : en classe de sixième, après cinq ans de scolarité primaire, seulement 15 % des élèves maîtrisent simultanément les quatre opérations sur les décimaux.

Rectifier

D'une façon générale, j'attache donc une grande importance à la rectification des erreurs par **l'abandon d'une représentation mentale**(5) **inadaptée**.

Mais pour cela, **le discours est souvent inefficace**. Qui n'a jamais prononcé : « je ne comprends pas que tu ne comprends pas » après avoir fait de vains efforts pour expliquer à l'élève ? Seule, la contrainte des faits, **la vérification expérimentale** de l'inefficacité de la représentation, peut infirmer valablement celle-ci, et obliger l'enfant à la rectifier, à en proposer une autre, ou bien à accepter celle proposée par un autre enfant ou par le maître ;

- ce que Piaget résume par « *l'enfant a un conflit cognitif* » ;
- ce que Bachelard explique par : « *l'échec, c'est l'objet de la connaissance qui résiste à notre interprétation.* »

Si je reprends l'erreur de Nathalie :

pour la faire évoluer, il faut qu'elle bute sur un fait polémique concret qui provoque **ce conflit cognitif** ou que le conflit socio-cognitif s'instaure par la critique de ses pairs.

Je vais lui demander, ainsi qu'à la classe, de placer sur l'axe les nombres décimaux : 0,3- 0,4- 0,7- 0,9 puis 3,5 - 3,8 - 3,9, pour que Nathalie et le groupe constatent la nécessité de modifier la représentation.

D'une manière générale nous travaillons beaucoup sur nos erreurs.

Nous réfléchissons collectivement pour les critiquer et pour tenter de comprendre les « **pourquoi** » et les « **comment** » de ces erreurs. Erreurs de structure, de représentations, de démarches.

Dresser ou apprendre à penser ?

L'absence de prise en compte des représentations mentales des enfants ou l'absence de la destruction des images mentales erronées, risque d'entraîner la mise en place dans le « cerveau » de **deux types de pensée mathématique** :

1. D'une part, un type de pensée qui permet de répondre aux problèmes, lorsqu'ils entrent dans le moule étroit des modèles d'apprentissages (situations stimuli-réponses, imitations strictes et problèmes types).

On constate alors que ce type de pensée est inefficace surtout lorsqu'il s'agit de **réinvestir les concepts supposés acquis**, d'une manière discriminative, dans des situations nouvelles ou plus complexes.

Il suffit souvent d'une petite variation de la situation problème pour que les enfants soient perdus. Ce qui tendrait à prouver que la mise en place de concepts, ou l'apprentissage par ce biais, est inopérante ou pour le moins insuffisante.

2. D'autre part, persiste dans le cerveau des enfants une pensée mathématique moins scolaire et plus personnelle, faite d'un ensemble de représentations mentales, pensée mathématique dont il risque de n'exister que **peu de liaison avec la précédente**.

Ceci pourrait expliquer l'incapacité de certains enfants à résoudre, de manière autonome, des situations problèmes complexes qui font appel à la coordination des deux types de pensée mathématique ; l'un fait de savoirs scolaires, l'autre de représentations mentales personnelles ; c'est-à-dire quand il est nécessaire à l'enfant de mobiliser tout son appareil de raison.

En conclusion

La reconnaissance de l'erreur a donc, pour moi, un double but :

1. Elle permet de ne pas lui donner un caractère culpabilisant qui serait le départ d'une inhibition pour la recherche, et d'un dégoût des maths.

2. Les erreurs sont des messages épistémologiques des représentations mentales des enfants. Leur étude permet de réajuster notre action, de façon individuelle ou collective, pour aider les enfants à construire un savoir mathématique qui tienne compte de leur pensée propre.

L'enseignement des mathématiques consiste pour moi à faire émerger ces représentations mentales erronées ou inadaptées, à conduire l'enfant vers un « conflit cognitif » par l'expérience, ou par la confrontation, qui le contraindra à en élaborer une autre, à accepter puis à s'approprier celle, plus efficiente, proposée par un autre enfant ou à prendre (et non apprendre) celle donnée par le maître.

Ce qui ne veut pas dire qu'il faille abandonner totalement l'aspect « liturgique » des mathématiques mais le réduire à sa fonction première, à savoir un vocabulaire opératoire commun.

L'évaluation

L'absence de prise en compte de ces représentations fausse également notre perception et notre représentation de **savoir réel des enfants**.

C'est pour cette raison qu'il est difficile de modifier nos pratiques et, bien que nous en soyons conscients, nous avons quelquefois tendance à revenir à des séances dont la finalité (au-delà du contenu) est **l'obtention d'une réussite apparente qui rassure**.

Cela pose aussi **le problème de l'évaluation** par les contrôles continus dont la proximité avec la période d'apprentissage n'est pas garante de la solidité des acquis supposés.

L'organisation

Reste le problème d'organisation pédagogique que pose cette stratégie.

Cela m'a imposé l'instauration de **techniques particulières** :

- recherches libres en mathématiques
- personnalisation du travail
- travail en petits groupes et autres techniques spécifiques de la pédagogie Freinet que j'ai mis

en place progressivement. Sans cela, il me paraît impossible de pratiquer une telle démarche avec trente, vingt-cinq ou même vingt élèves à la fois. Seul, le travail en petit groupe, une dizaine d'élèves maximum, permet d'œuvrer efficacement par le biais de la communication.

*Jany Gibert, janvier 1989
avec la participation critique
de Raoul Millan.*

Pour illustrer ses pratiques pédagogiques (Pédagogie Freinet) auprès des collègues de sa circonscription, l'auteur a publié cet article dans le bulletin ALEPH (circonscription de Lodève).

(1) **Évitements** : on peut les rapprocher des mécanismes de fuite décrits par H. Laborit.

(2) **Inhibitions cognito-affectives** : terme très savant qui veut dire qu'à force de prendre des « gifles » en math devant les petits copains, on rentre vite dans sa coquille et on n'a plus envie de chercher.

(3) **Épistémologie** : en philo, étude de la science, d'un point de vue critique.

(4) **Algorithme** : enchaînement logique « d'opérations » dans la résolution de problèmes.

(5) **Représentations mentales** : terme qui regroupe un certain nombre de processus mentaux liés à la nature physico-chimique du cerveau : percepts, images mentales, concepts (J.-P. Changeux : *L'Homme neuronal*).

On peut aussi se référer aux travaux de Bruner, en particulier sur les différents types de représentation qu'il a recensés : représentation enactive, iconique, symbolique.

Les représentations mentales ne sont pas uniquement visuelles ; elles apparaissent aussi au cours d'une explication, d'un raisonnement oral. Pour ceux qui sont intéressés, j'ai essayé de poursuivre ma réflexion sur la nature des images mentales mises en place suivant les procédés d'apprentissage des mathématiques (imitation, situations types, etc.).